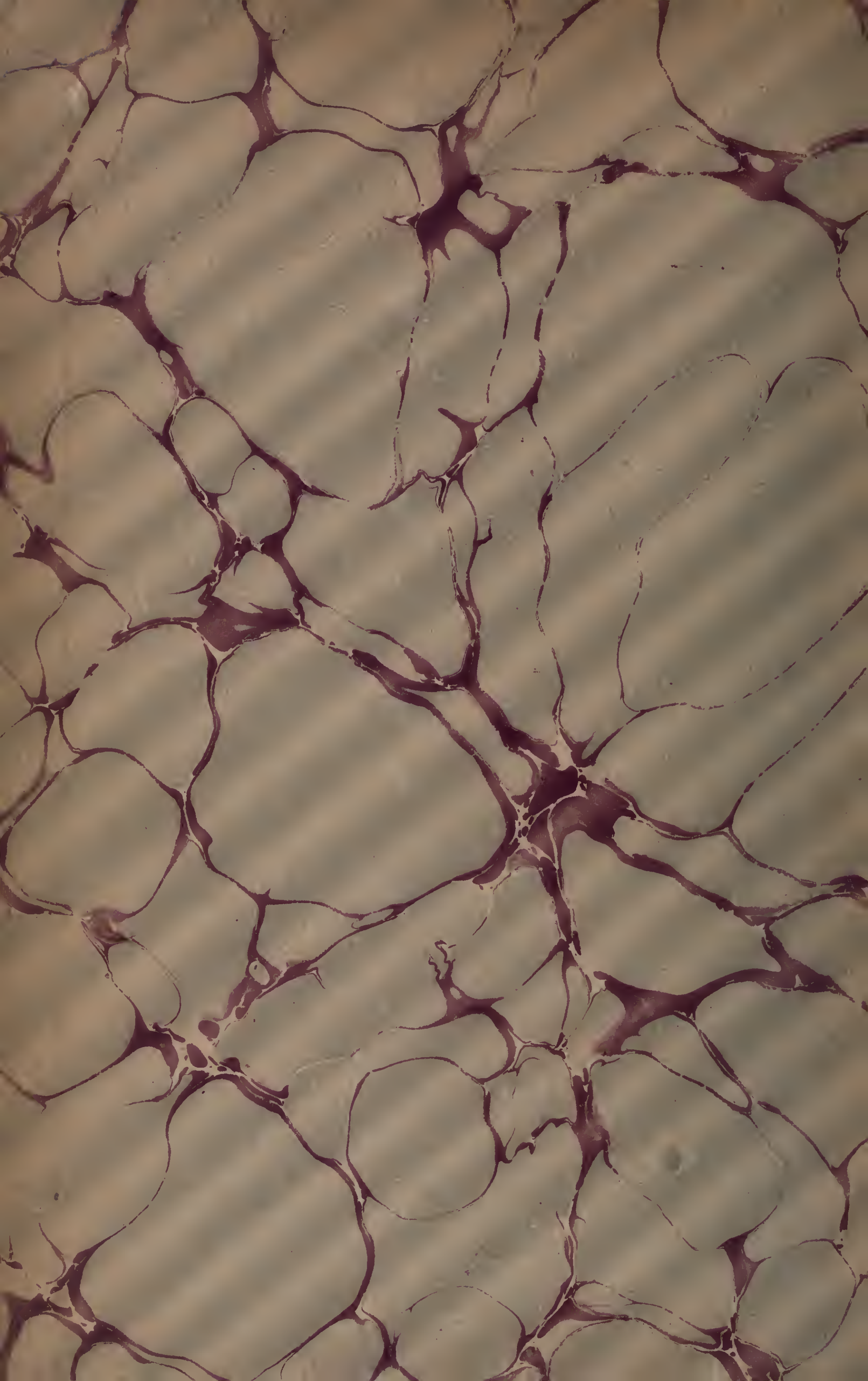
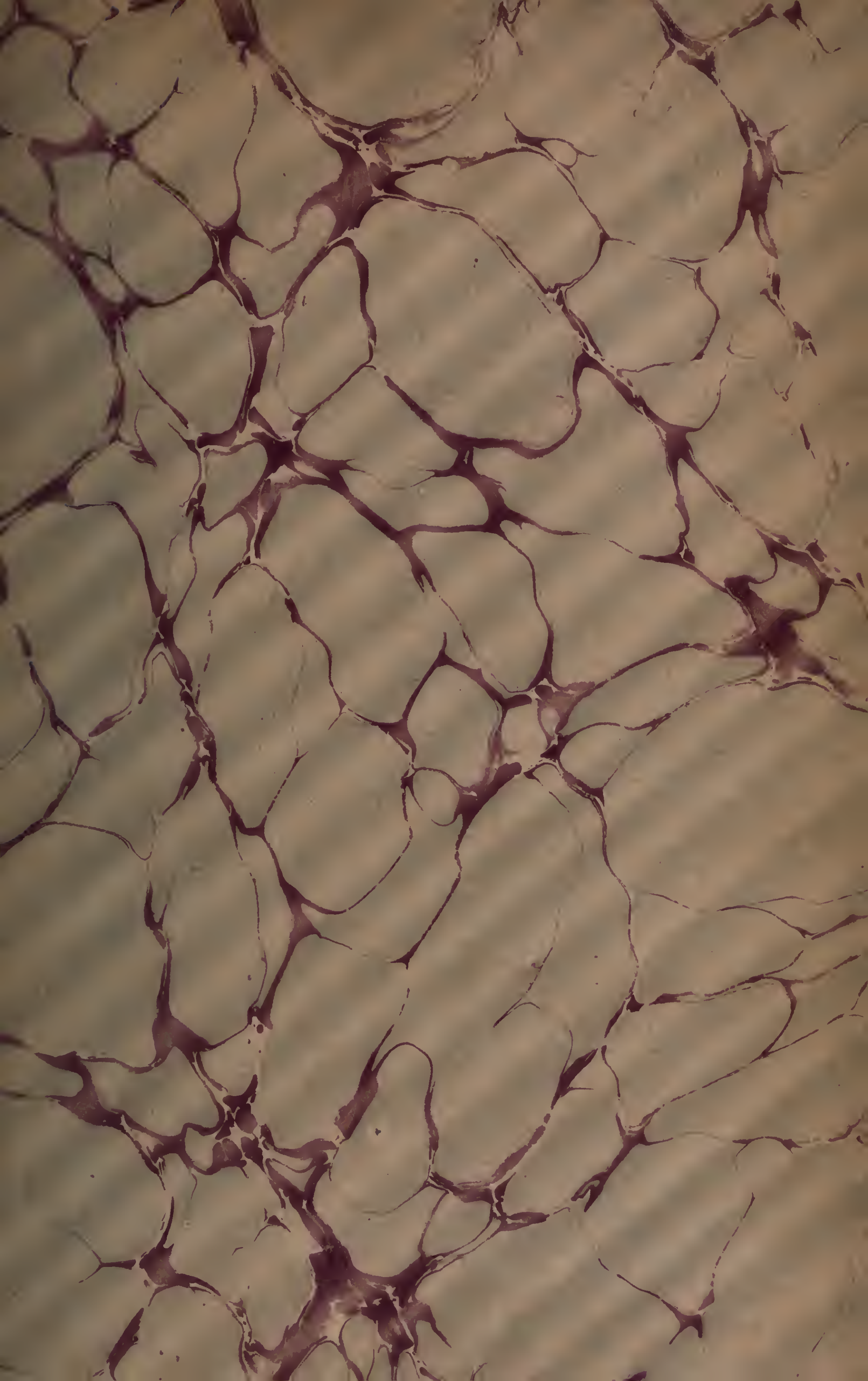

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01217746 5





APPLICATION

DE LA

MÉTHODE VECTORIELLE

DE GRASSMANN

A LA

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

APPLICATION

DE LA

MÉTHODE VECTORIELLE

DE GRASSMANN

A LA

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

HENRI FEHR



PARIS
GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, 3

1899

La Faculté des Sciences autorise l'impression de la présente dissertation, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Genève, le 17 avril 1899.

Le Doyen,

R. CHODAT.

APPLICATION
DE LA
MÉTHODE VECTORIELLE
DE GRASSMANN
A LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

PRÉFACE

L'œuvre de Grassmann [1]. — H. Grassmann a enrichi la science mathématique d'une branche nouvelle qu'il désigne sous le nom de *Ausdehnungslehre* (ou science des grandeurs extensives). C'est la théorie des fondements abstraits de la science des grandeurs ; son application particulière au cas où l'on fait intervenir la considération de l'espace constitue la Géométrie.

La méthode de Grassmann comprend un ensemble d'opérations parmi lesquelles la multiplication extérieure et la multiplication intérieure jouent un rôle très important. Elle conduit aisément à la résolution d'une foule de problèmes qui se présentent non seulement en Géométrie, mais encore dans toutes les branches qui se rattachent à la science de l'étendue.

Malgré leur puissance et leur simplicité, les méthodes du

---

[1] Nous nous bornons à citer ici les deux publications fondamentales : 1° *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig. 1844 ; 2° *Die Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862. Dans ce dernier ouvrage Grassmann présente sa théorie sous une forme entièrement nouvelle.

Les *Œuvres complètes* de Grassmann, publiées par M. Fr. Engel. comprendront trois volumes ; les deux premiers, seuls ont paru ; Leipzig, 1896.

savant professeur de Stettin sont restées méconnues de la plupart de ses contemporains. Cet insuccès doit être attribué au grand nombre de notions nouvelles que l'on y rencontre, et au formalisme si abstrait dans lequel elles sont présentées. Ce n'est guère que depuis une dizaine d'années que les idées de Grassmann ont été reprises et développées par un certain nombre de géomètres dans les divers pays. Tout récemment, à l'occasion du cinquantième anniversaire de la publication du premier traité de l'*Ausdehnungslehre*, M. V. SCHLEGEL [1] a retracé, dans leur développement historique, les progrès accomplis dans ce nouveau domaine.

Aujourd'hui l'étude de ces nouvelles méthodes est facilitée dans une large mesure par les exposés élémentaires que l'on doit à MM. SCHLEGEL [2], PEANO [3], KRAFT [4], BURALI-FORTI [5], HYDE [6], CARVALLO [7], CASPARY [8], et d'autres, et par la publication des œuvres de Grassmann annotées par MM. LÜROTH, Ed. STUDY, J. GRASSMANN, H. GRASSMANN fils, G. SCHEFFERS et Fr. ENGEL.

Objet de ce Mémoire. — Parmi les nombreux domaines où l'on applique avec succès les principes de l'*Ausdehnungslehre*, celui de la Géométrie infinitésimale nous a paru particulièrement intéressant, et c'est dans ce sens que nous avons dirigé nos recherches. Nous nous proposons de montrer dans ce Mémoire combien la méthode vectorielle sim-

---

(1) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Leipzig, année 1896. — Cette notice est accompagnée de nombreuses indications bibliographiques.

(2) *System der Raumlehre*, 2 volumes, Leipzig, 1872, 1875.

(3) *Calcolo geometrico*, Turin, 1888; Edition allemande : *Die Grundzüge des geometrischen Calculs*, Leipzig, 1891.

(4) *Abriss des geometrischen Kalküls*, Leipzig, 1893.

(5) *Introduction à la Géométrie différentielle*, Paris, 1897.

(6) *The Directional Calculus*, Boston, 1890. — Le même auteur a rédigé pour le *text-book Higher Mathematics*, publié par Merriman et Woodward, un chapitre intitulé *Grassmanns Space Analysis*.

(7) *Nouvelles Annales*, 1891, 1892, 1893.

(8) Voir ses notes dans les *Nouv. Annales*, 1898, 1899. — Consulter aussi ses Mémoires insérés dans le *Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XI et t. XIII.

plifie l'étude des propriétés des courbes et des surfaces. Cette simplification provient du fait que l'on renonce à l'emploi des coordonnées cartésiennes pour opérer directement sur les éléments géométriques; ces éléments sont soumis à certaines règles de calcul que nous résumerons brièvement dans l'*Introduction*.

L'application du calcul géométrique de Grassmann à la théorie des courbes et des surfaces a été déterminée pour la première fois par M. Herm. Grassmann (fils) dans ses *Programmes* de Halle (1886, 1888, 1893). Nous avons repris ces publications en les développant particulièrement en ce qui concerne la théorie des surfaces. On retrouvera donc dans notre Mémoire certains passages du travail de notre collègue de Halle, ces emprunts nous ont paru indispensables à l'unité et à la clarté de l'exposé.

Dans leur ensemble, les propriétés que nous examinons ici n'offrent rien d'essentiellement nouveau; aussi avons-nous évité, le plus possible, d'entrer dans le détail de certains développements que l'on peut trouver dans les ouvrages classiques et dont l'exposé n'est guère modifié par l'usage du calcul géométrique. C'est le mode d'exposition basé sur l'emploi systématique des vecteurs, qui, seul, peut donner un certain intérêt à ce travail, et nous espérons avoir ainsi apporté une légère contribution à l'étude d'une branche qui n'a été que trop délaissée jusqu'à présent.

Nous donnons maintenant un aperçu succinct des matières successivement traitées.

Le Mémoire comprend cinq chapitres :

Le Chapitre I est consacré aux courbes gauches. Nous établissons d'abord les équations de la tangente et du plan normal, puis celles du plan osculateur et de la normale principale. Viennent ensuite les généralités relatives à la courbure, à la torsion et à la courbure normale d'une courbe, avec les formules de Frenet et celle de Lancret.

Dans le Chapitre II nous abordons les éléments de la théorie des surfaces et nous montrons comment l'introduction de trois vecteurs-unité e_u, e_v, et e_ν simplifie l'étude des relations fondamentales du premier et du second ordre. Les éléments e_u et e_v sont les vecteurs tangentiels aux courbes coordonnées (u) et (v) ; l'élément e_ν est le vecteur-unité normal à la surface.

Le Chapitre III contient ce qui est relatif à la courbure des courbes tracées sur une surface : théorème de Meusnier, sections principales, formule d'Euler.

Les notions précédentes se trouvent appliquées, dans le Chapitre IV, à l'étude des courbures des surfaces. On obtient aisément les formules relatives à la courbure totale et à la courbure moyenne ; nous appliquons les premières à la détermination de la courbure totale d'une surface réglée, tandis que les secondes nous amènent à donner quelques notions relatives aux surfaces minima. Nous passons ensuite à la notion importante de courbure moyenne quadratique, dont nous déterminons l'expression à l'aide de la méthode vectorielle.

Le Chapitre V a pour objet les lignes particulières tracées sur une surface. Nous partons des systèmes conjugués pour en déduire, comme cas particuliers les lignes de courbure et les lignes asymptotiques. Les équations de ces courbes prennent une forme remarquablement simple et se prêtent à une interprétation géométrique immédiate.

Sont encore étudiées dans ce chapitre les lignes géodésiques et la courbure géodésique des lignes tracées sur une surface.

Afin de faciliter la lecture de ce Mémoire, nous résumerons d'abord, le plus brièvement possible, les principales opérations que nous empruntons au calcul géométrique de Grassmann.

INTRODUCTION

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS DE CALCUL GÉOMÉTRIQUE

I. — D'une manière générale tout calcul géométrique comprend l'ensemble des opérations auxquelles on soumet un système déterminé d'éléments géométriques ([1]). Il présente sur la géométrie analytique l'avantage d'opérer directement sur les éléments à considérer.

Les *éléments géométriques* qui interviennent dans la théorie de Grassmann sont les suivants : le point, le segment, le vecteur, le bivecteur (ou élément plan) et le trivecteur.

Tout élément géométrique présente au moins l'un des caractères suivants : grandeur, position, direction et sens. Dans la combinaison de ces éléments on fait usage de *nombres* (ou parties scalaires).

En ce qui concerne nos recherches, nous nous servons presque exclusivement du vecteur ; nous nous bornerons donc à rappeler ce qui est relatif à cet élément.

Segment. — Voici d'abord la définition du *segment*.

Etant donnés deux points A et B, le segment AB est la portion limitée de la droite joignant le point A au point B ; A est l'origine du segment, B est son extrémité.

([1]) L'idée d'un pareil calcul remonte à Leibniz (1679) ; elle a été développée pendant la première moitié de ce siècle par Möbius, dans son *Calcul barycentrique* (1627), par Bellavitis, dans sa *Méthode des Equipollences* (dès 1833), par Grassmann, dans son *Ausdehnungslehre* (1844) et par Hamilton, dans sa *Théorie des Quaternions* (1853). Parmi ces méthodes, celle de Grassmann est certainement la plus générale, mais, pour les raisons indiquées plus haut, elle est restée, pendant longtemps, la moins connue.

On appelle *grandeur* (ou *module*) de AB, le nombre positif qui mesure la distance AB.

Un segment est déterminé par sa grandeur, sa position, sa direction et son sens.

Vecteur. — Le *vecteur* se distingue du segment en ce que sa position n'est pas déterminée. Ainsi, étant donnés deux points A_1 et B_1, le vecteur $a_1 = B_1 - A_1$ peut être appliqué en n'importe quel point de l'espace.

Si l'on considère un second vecteur $a_2 = B_2 - A_2$, les vecteurs a_1 et a_2 sont égaux si les segments A_1B_1 et A_2B_2 ont même grandeur, même direction et même sens. Il en résulte qu'un vecteur est déterminé par sa grandeur, sa direction et son sens.

La grandeur d'un vecteur est évaluée au moyen d'un vecteur-unité e_1 ayant même direction et même sens. On a, par exemple, $a_1 = \rho e_1$, ρ étant un nombre.

Nous pouvons nous dispenser de parler ici de la notion bien connue de la somme (géométrique) de deux ou plusieurs vecteurs, ainsi que de la différence de deux vecteurs.

Trois vecteurs a_1, a_2, a_3, sont dits *coplanaires* lorsqu'ils sont parallèles à un même plan. On montre que, dans ce cas, l'un d'eux est une fonction linéaire des deux autres, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$a_3 = x_1 a_1 + x_2 a_2,$$

x_1 et x_2 étant des nombres.

II. ***Produit extérieur.*** — Le *produit extérieur* [1] $[a_1 a_2]$ *de deux vecteurs* a_1 et a_2 est caractérisé par les relations

$$[a_1 a_2] = -[a_2 a_1], \quad \text{d'où} \quad [a_1 a_1] = [a_2 a_2] = 0.$$

Quelques auteurs désignent un pareil produit de deux vecteurs sous le nom de *bivecteur*.

On fait correspondre au produit extérieur $[a_1 a_2]$ l'aire du parallélogramme dont les côtés sont a_1 et a_2. Le signe de l'aire

---

(1) *Ausdehnungslehre* (1844), § 28 à § 46. — Afin de distinguer le produit extérieur d'autres produits, nous ferons usage de la notation de GRASSMANN en mettant les facteurs entre deux crochets.

varie avec le sens dans lequel on parcourt le pourtour du parallélogramme. Nous admettrons comme sens positif le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

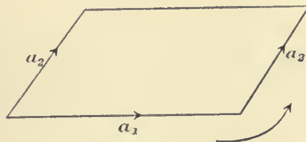


Fig. 1.

Le produit de deux vecteurs est nul, si l'un des vecteurs est nul, ou si les deux vecteurs sont parallèles.

On a donc pour la *condition de parallélisme de deux vecteurs* a_1, a_2,

$$[a_1 a_2] = 0.$$

On démontre aisément les relations suivantes :

$$[a_1(a_2 + a_3)] = [a_1 a_2] + [a_1 a_3],$$
$$[\rho a_1 a_2] = \rho[a_1 a_2], \quad \text{et} \quad [a_1 a_2] = [a_1(a_2 + \rho a_1)]$$

ρ étant un nombre.

Considérons maintenant le produit extérieur de *trois vecteurs* a_1, a_2, a_3, désigné aussi sous le nom de *trivecteur*. Il est caractérisé par les relations

$$[a_1 a_2 a_3] = -[a_1 a_3 a_2] = [a_3 a_1 a_2].$$

Au produit $[a_1 a_2 a_3]$ on fait correspondre le volume du parallélipipède dont les arêtes, issues d'un même sommet, sont a_1, a_2, a_3. La détermination du signe se fait en comparant le parallélipipède $[a_1 a_2 a_3]$ au cube unité $[e_1 e_2 e_3] = 1$. Le signe sera positif si le trièdre $a_1 a_2 a_3$ a la même disposition que le trièdre $e_1 e_2 e_3$; il sera négatif dans le cas contraire. Nous supposons le trièdre $e_1 e_2 e_3$ tel que, pour un observateur debout sur le plan $e_1 e_2$ et traversé des pieds à la tête par le vecteur e_3, une rotation de $90°$ de droite à gauche amène e_1 sur e_2.

Le trivecteur $[a_1 a_2 a_3]$ est nul si l'un des vecteurs est nul, ou si les trois vecteurs sont parallèles à un même plan. La *condition*

de coplanarité de trois vecteurs peut donc encore être écrite sous la forme

$$[a_1 a_2 a_3] = 0.$$

III. ***Produit intérieur*** [1]. — Pour le produit intérieur de deux vecteurs a_1 et a_2, Grassmann a recours à la notation $[a_1|a_2]$. Un pareil produit est caractérisé par la condition

$$[a_1 | a_2] = [a_2 | a_1].$$

Les vecteurs a_1 et a_2 que nous considérons ici sont des vecteurs quelconques pris dans l'espace ; on peut d'ailleurs toujours les supposer appliqués en un même point.

Au produit intérieur de deux vecteurs on fait correspondre l'aire d'un rectangle ayant comme dimensions l'un des vecteurs et la projection de l'autre sur le premier.

Il est facile d'établir un rapprochement entre ce produit et le produit extérieur de deux vecteurs. En effet, si nous supposons les deux vecteurs appliqués en un même point, nous pouvons dire : le produit intérieur de deux vecteurs a_1 et a_2 peut être envisagé comme le produit extérieur de a_1 par le vecteur $|a_2$ obtenu en faisant tourner a_2 d'un angle droit dans le sens de a_1 vers a_2.

Le produit intérieur de deux vecteurs est nul si l'un des vecteurs est nul, ou si les deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux.

On a donc pour la *condition de perpendicularité de deux vecteurs* a_1 et a_2

$$[a_1 | a_2] = 0.$$

Envisageons maintenant l'angle α que forment deux vecteurs quelconques a_1 et a_2 supposés issus d'un même point de l'espace ; cet angle est compté dans le sens de a_1 vers a_2. Si l'on désigne par mod a_1 et mod a_2 les valeurs absolues de a_1 et de a_2 on aura, d'une part, pour le produit extérieur,

$$[a_1 a_2] = \text{mod } a_1 \text{ mod } a_2 \sin \alpha,$$

(1) *Ausdehnungslehre*, 1862, 1re partie, chap. IV et chap. V, § 7.

et, d'autre part, pour le produit intérieur,

$$[a_1 \mid a_2] = \text{mod } a_1 \text{ mod } a_2 \cos \alpha.$$

On en déduit

$$\sin \alpha = \left[\frac{a_1}{\text{mod } a_1} \cdot \frac{a_2}{\text{mod } a_2}\right], \quad \cos \alpha = \left[\frac{a_1}{\text{mod } a_1} \middle| \frac{a_2}{\text{mod } a_2}\right].$$

Pour le cas particulier de deux vecteurs-unité e_1 et e_2, on a simplement

$$\sin \alpha = [e_1 e_2], \quad \cos \alpha = [e_1 \mid e_2].$$

De l'expression

$$[a_1 \mid a_2] = \text{mod } a_1 \text{ mod } a_2 \cos \alpha,$$

on peut déduire la *valeur numérique du module* d'un vecteur. On a, en effet, pour le produit intérieur d'un vecteur par lui-même.

$$[a_1 \mid a_1] = (\text{mod } a_1)^2.$$

Le produit $[a_1 | a_1]$, que l'on écrit pour abréger sous la forme $[a_1]^2$ est appelé *carré intérieur* du vecteur a_1 ; il correspond à un carré dont le côté a pour mesure mod a_1. On a donc

$$\text{mod } a_1 = \sqrt{[a_1 \mid a_1]} = \sqrt{a_1^2}.$$

Ainsi on obtient le *module d'un vecteur* en extrayant la racine carrée de son carré intérieur.

Considérons par exemple dans un plan deux vecteurs-unité e_1 et e_2 formant entre eux un angle α.

On a donc, par hypothèse,

$$e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = 1, \quad [e_1 \mid e_2] = \cos \alpha.$$

Tout vecteur a de ce plan peut être représenté par une expression de la forme

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

x_1 et x_2 étant des nombres. On pourra écrire

$$[a \mid a] = [(x_1 e_1 + x_2 e_2) \mid (x_1 e_1 + x_2 e_2)],$$

ou

$$(\mathrm{mod}\, a)^2 = x_1^2 + 2\cos\alpha . x_1 x_2 + x_2^2.$$

Si les deux vecteurs-unité sont rectangulaires, on a simplement

$$\mathrm{mod}\, a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

On préfère souvent éviter la racine carrée et déterminer le module d'un vecteur a à l'aide du vecteur-unité e_α ayant même direction et même sens. Dans ce cas on a

$$\mathrm{mod}\, a = [a \mid e_\alpha].$$

Remarque. — Le produit intérieur de deux vecteurs limité au système plan offre une grande analogie avec l'opération $i\,(i = \sqrt{-1})$ dont fait usage Argand dans ses *Essais* (Paris, 1806). Si à la place du symbole | on se sert de l'unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$, on parvient pour le vecteur à une expression d'un emploi très commode [1].

Prenons, dans un système plan, deux vecteurs-unité rectangulaires E_1 et E_2. On a donc

$$E_1^2 = 1, \quad E_2^2 = 1, \quad [E_1 E_2] = 1, \quad [E_1 \mid E_2] = 0.$$

Soit a un vecteur du plan. On entend par $|a$ ou ia le vecteur obtenu par la rotation de a d'un angle droit dans le sens de E_1 vers E_2. Cette opération appliquée une deuxième fois donne $iia = -a$, d'où il résulte que $i^2 = -1$.

Les expressions $[a_1 | a_2]$ et $[a_1\, ia_2]$ sont équivalentes.

On a, pour tout vecteur a,

$$a = x_1 E_1 + x_2 E_2,$$

mais, puisque

$$E_2 = | E_1 = iE_1,$$

on aura

$$a = x_1 E_1 + x_2 i E_1 = (x_1 + x_2 i)\, E_1$$

et, si l'on pose

$$\mathrm{mod}\, a = \rho$$

[1] Consulter à ce sujet *Ausdehnungslehre*, 1862, n° 90, et les ouvrages cités de Peano et de Burali-Forti.

on voit que tout vecteur du plan peut se représenter par

$$a = \rho e^{i\varphi}.E_1$$

φ étant l'angle formé par les vecteurs E_1 et a.

IV. ***Index d'un vecteur ou d'un bivecteur*** [1]. — Envisageons le bivecteur déterminé par deux vecteurs a_1 et a_2 supposés appliqués en un point P de l'espace. Soit a_3 un vecteur perpendiculaire en P au plan $[a_1 a_2]$ et mené dans un sens tel que le trivecteur $[a_1 a_2 a_3]$ soit positif ; nous donnons au vecteur a_3 une longueur telle que son module soit égal au nombre qui exprime l'aire $[a_1 a_2]$.

Le vecteur ainsi défini est ce que l'on appelle *l'index* du bivecteur $[a_1 a_2]$; on le représente par la notation

$$a_3 = |\,[a_1 a_2].$$

Réciproquement on dit que l'index du vecteur a_3 est le bivecteur $[a_1 a_2]$, et l'on écrit

$$|\,a_3 = [a_1 a_2].$$

En particulier on peut prendre pour le bivecteur défini par $|a_3$ le rectangle ayant comme dimensions la longueur de a_3 et l'unité de longueur.

Le symbole | que nous employons ici est le même que celui dont nous avons fait usage dans la multiplication intérieure de deux vecteurs. Il est facile de constater que sa signification reste la même. En effet, considérons le trivecteur $[abc]$; désignons par d l'index de $[bc]$, c'est-à-dire, posons

$$d = |\,[bc] \qquad \text{ou} \qquad |\,d = [bc].$$

On pourra remplacer $[abc]$ par le produit $[a|d]$. Ce dernier représente encore le volume du parallélipipède $[abc]$, puisque, par définition, la longueur du vecteur d correspond à l'aire $[bc]$.

---

[1] GRASSMANN emploie le nom de *Ergänzung*, mais en se plaçant à un point de vue beaucoup plus général ; voir *Ausdehnungslehre*, 1862, n° 89 à n° 93. HYDE se sert de la dénomination de *the complement*, BURALI-FORTI de celle d'*opération index* (l. c., p. 27).

Les formules qui suivent résument les propriétés les plus importantes concernant l'index d'un vecteur ou d'un bivecteur :

$$\| a = a, \qquad |xa = x|a \qquad (x \text{ quantité numérique}),$$
$$|(a+b) = |a + |b, \qquad [(a+b)|c] = [a|c] + [b|c],$$
$$[|a|b] = |[ab], \qquad [|a]^2 = a^2 ;$$

a, b, c représentent des vecteurs ou des bivecteurs.

Considérons maintenant le trivecteur-unité trirectangulaire $[e_1 e_2 e_3] = 1$.

On a

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \qquad [e_1|e_2] = [e_2|e_3] = [e_3|e_1] = 0$$
$$e_1 = |[e_2e_3] \qquad |e_1 = \| [e_2e_3] = [e_2e_3]$$
$$e_2 = |[e_3e_1] \qquad |e_2 = \| [e_3e_1] = [e_3e_1]$$
$$e_3 = |[e_1e_2] \qquad |e_3 = \| [e_1e_2] = [e_1e_2].$$

Tout vecteur a rapporté à ce système peut être représenté par une expression de la forme

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3,$$

dans laquelle x_1, x_2, x_3 sont des quantités numériques.

On a, pour l'index du vecteur a

$$|a = |(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x|e_1 + x_2|e_2 + x_3|e_3,$$

ou

$$|a = x_1[e_2e_3] + x_2[e_3e_1] + x_3[e_1e_2].$$

La longueur du vecteur a est donnée par la formule

$$\text{mod}\, a = \sqrt{a^2}.$$

Or on a

$$a^2 = [a|a] = [(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)|(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)]$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

d'où l'on déduit,

$$\text{mod}\, a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

V. ***Produit intérieur de deux bivecteurs.*** [1] — Soient deux bivecteurs $[a_1 a_2]$ et $[b_1 b_2]$ et soit

$$c = |[b_1 b_2].$$

En vertu de cette égalité, le produit intérieur

$$[a_1 a_2 | b_1 b_2]$$

peut être remplacé par le produit extérieur

$$[a_1 a_2 c].$$

Ainsi le produit intérieur de deux bivecteurs donne un trivecteur ; il peut être envisagé comme résultant de la multiplication extérieure du premier bivecteur par l'index de l'autre.

On a la propriété

$$[a_1 a_2 | b_1 b_2] = [b_1 b_2 | a_1 a_2].$$

Examinons maintenant le carré intérieur d'un bivecteur, c'est-à-dire une expression de la forme

$$[a_1 a_2]^{\underline{2}}.$$

Soit b le vecteur index, on a

$$b = |[a_1 a_2] \qquad \text{et} \qquad |b = [a_1 a_2].$$

Par définition, la longueur du vecteur b est donnée par le nombre qui exprime l'aire $[a_1 a_2]$; on a donc

$$\text{mod}\, b = \text{mod}\, a_1 . \text{mod}\, a_2 . \sin (a_1 a_2),$$

ce qui nous conduit aux égalités

$$[a_1 a_2]^{\underline{2}} = [a_1 a_2 | a_1 a_2] = [a_1 a_2 b] = [b a_1 a_2] = [b | b] = b^{\underline{2}}.$$

Ainsi, le carré intérieur d'un bivecteur est égal au carré intérieur de son index.

---

(1) Voir GRASSMANN, *Ausdehnungslehre*, 1862, chap. IV et GRASSMANN (fils), *Programme*, 1886, p. 17.

On en déduit

$$\begin{aligned}[a_1 a_2]^2 &= (\text{mod}\, a_1)^2\, (\text{mod}\, a_2)^2 \sin^2 (a_1 a_2) \\ &= (\text{mod}\, a_1)^2\, (\text{mod}\, a_2)^2 - (\text{mod}\, a_1)^2\, (\text{mod}\, a_2)^2 \cos^2 (a_1 a_2)\end{aligned}$$

ou enfin,

$$[a_1 a_2]^{\underline{2}} = a_1^{\underline{2}}\, a_2^{\underline{2}} - [a_1 \mid a_2]^2,$$

relation qui, pour le cas particulier de deux vecteurs rectangulaires, se réduit à

$$[a_1 a_2]^{\underline{2}} = a_1^{\underline{2}}\, a_2^{\underline{2}}, \qquad \text{puisqu'alors} \qquad [a_1 \mid a_2] = 0.$$

Nous sommes ainsi conduits à la *valeur numérique de l'aire d'un bivecteur.* En effet, de l'égalité

$$[a_1 a_2]^{\underline{2}} = (\text{mod}\, a_1)^2\, (\text{mod}\, a_2)^2 \sin^2 (a_1 a_2)$$

il résulte pour l'aire $[a_1 a_2]$

$$\text{mod}\, a_1\, \text{mod}\, a_2 \sin (a_1 a_2) = \sqrt{[a_1 a_2]^{\underline{2}}}.$$

On obtient donc la valeur de l'aire d'un bivecteur en extrayant la racine carrée du carré intérieur de ce bivecteur.

Cependant on préfère souvent appliquer directement la définition du vecteur index et calculer l'aire d'un bivecteur en déterminant le module de l'index du bivecteur donné.

Cette détermination peut se faire de deux manières, ainsi que nous l'avons vu plus haut ; d'une part, le module de $b = \mid [a_1 a_2]$ peut être calculé au moyen de la formule

$$\text{mod}\, b = \sqrt{b^{\underline{2}}};$$

d'autre part, on l'obtient encore en ayant recours au vecteur-unité e_3 perpendiculaire au bivecteur. Dans ce cas on a

$$\text{mod}\, b = [e_3 \mid b],$$

et comme

$$\mid b = [a_1 a_2],$$

la valeur numérique de l'aire sera donnée par l'expression

$$[e_3 a_1 a_2],$$

c'est-à-dire par le trivecteur déterminé par les vecteurs a_1 et a_2 et le vecteur index de longueur unité.

VI. **Déterminants.** — L'usage des déterminants simplifie beaucoup l'exposé de la géométrie analytique ; mais leur maniement exige toujours une étude spéciale. Par contre, dans la méthode de Grassmann, la théorie des déterminants se présente comme une simple conséquence de la multiplication extérieure (1).

D'une manière générale la multiplication extérieure repose sur la convention unique que le produit de deux quantités e_r et e_s, appelées *unités*, change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs ; il en résulte que tout produit renfermant deux fois la même unité est nul (2).

On vérifie aisément que cette propriété s'étend encore aux quantités a_i

$$a_i = \alpha_{i,1} e_1 + \alpha_{i,2} e_2 + \ldots\ldots + \alpha_{i,n} e_n, \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots k)$$

fonctions linéaires des unités $e_1, e_2, \ldots e_n$.

Considérons les n formes

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{1,1} e_1 + \alpha_{1,2} e_2 + \ldots\ldots + \alpha_{1n} e_n, \\ a_2 &= \alpha_{2,1} e_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \ldots\ldots + \alpha_{2n} e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \alpha_{n,1} e_1 + \alpha_{n,2} e_2 + \ldots\ldots + \alpha_{n,n} e_n, \end{aligned}$$

et effectuons le produit extérieur $[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n]$.

Dans le développement chaque terme contiendra n facteurs numériques suivis du produit extérieur des n unités $e_1, e_2, \ldots e_n$, prises dans un ordre déterminé. Ce dernier produit peut toujours être ramené à la forme $[e_1 e_2 \ldots e_n]$ affectée du signe + ou —

(1) *Ausdehnungslehre*, 1862, n° 62. — Pour la théorie des déterminants, considérée à ce point de vue, consulter par exemple la *Raumlehre* de SCHLEGEL (2e partie), l'ouvrage de KRAFT et le Mémoire de CARVALLO, *Nouv. Ann.*, 1891.

(2) Envisagée d'une manière aussi générale, le multiplication extérieure joue un rôle important non seulement dans le calcul géométrique, mais encore dans l'Algèbre ; voir à ce sujet, outre les travaux précités, la NOTE que nous avons publiée dans les *Nouv. Ann.* en 1895.

suivant que le nombre des transpositions effectuées a été pair ou impair.

On pourra donc écrire :

$$[a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n] = \Delta\,[e_1 e_2 e_3 \ldots\ldots e_n].$$

Le coefficient Δ est ce que l'on appelle le déterminant des formes $a_1 a_2 \ldots a_n$.

En particulier, si l'on suppose que $[e_1 e_2 \ldots e_n] = 1$, on a simplement

$$[a_1 a_2 \ldots\ldots a_n] = \Delta.$$

On reconnaît aisément que les propriétés fondamentales des déterminants se déduisent immédiatement de celles de la multiplication extérieure.

Nous nous bornons à rappeler ici une propriété dont nous aurons besoin dans la suite et qui est basée sur la multiplication de deux déterminants.

Pour simplifier l'écriture nous nous limiterons au cas de $n = 3$.

On a pour le produit des déterminants

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} \end{vmatrix}$$

des formes

$$a_i = \alpha_{i,1} e_1 + \alpha_{i,2} e_2 + \alpha_{i,3} e_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$b_i = \beta_{i,1} e_1 + \beta_{i,2} e_2 + \beta_{i,3} e_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$\Delta_\alpha . \Delta_\beta = [c_1 c_2 c_3],$$

en posant

$$c_i = \gamma_{i,1} e_1 + \gamma_{i,2} e_2 + \gamma_{i,3} e_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les quantités $\gamma_{i,r}$ étant définies par les égalités

$$\gamma_{i,r} = \alpha_{i,1} \beta_{r,1} + \alpha_{i,2} \beta_{r,2} + \alpha_{i,3} \beta_{r,3}.$$

Mais on peut écrire

$$\gamma_{i,} = [a_i \mid b_r],$$

de sorte que le théorème de la multiplication devient

$$[a_1 a_2 a_3][b_1 b_2 b_3] = \begin{vmatrix} [a_1 | b_1] & [a_2 | b_1] & [a_3 | b_1] \\ [a_1 | b_2] & [a_2 | b_2] & [a_3 | b_2] \\ [a_1 | b_3] & [a_2 | b_3] & [a_3 | b_3] \end{vmatrix}$$

Appliqué au *produit intérieur de deux bivecteurs* ce théorème conduit à la formule

$$[a_1 a_2 | b_1 b_2] = \begin{vmatrix} [a_1 | b_1] & [a_2 | b_1] \\ [a_1 | b_2] & [a_2 | b_2] \end{vmatrix}.$$

On y parvient sans peine si l'on envisage le produit intérieur de deux bivecteurs comme étant le produit extérieur du premier bivecteur par le vecteur index du second et si l'on applique le théorème de la multiplication au produit

$$[a_1 a_2 | b_1 b_2]\,[b_1 b_2 | a_1 a_2].$$

VII. **Relations avec les coordonnées cartésiennes.** — Considérons un point fixe O et trois vecteurs-unité e_1, e_2, e_3, non dans un même plan. Pour tout point M de l'espace on a

$$M = O + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Les nombres x_1, x_2, x_3, correspondent aux *coordonnées cartésiennes* du point M.

Nous supposons dans ce qui suit que le trivecteur e_1, e_2, e_3 est trirectangulaire, c'est-à-dire que, outre les relations

$$e_1^2 = 1, \qquad e_2^2 = 1, \qquad e_3^2 = 1,$$

on a encore

$$[e_1 | e_2] = [e_2 | e_3] = [e_3 | e_1] = 0.$$

Si pour un second point M′ on donne

$$M' = O + x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3,$$

la *distance* MM′ sera déterminée par l'expression

$$\begin{aligned} \text{mod } MM' &= \text{mod } (M - M') \\ &= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}. \end{aligned}$$

Considérons les deux vecteurs

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad \text{et} \quad a' = a_1' e_1 + a_2' e_2 + a_3' e_3.$$

La formule

$$\cos(a\,a') = \left[\frac{a}{\text{mod}\, a} \middle| \frac{a'}{\text{mod}\, a'} \right]$$

devient

$$\cos(a\,a') = \frac{a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2}}.$$

La condition de perpendicularité $[a|a'] = 0$ prend la forme connue

$$a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' = 0.$$

Quant à la condition de parallélisme $[aa'] = 0$ des deux vecteurs a et a', elle devient

$$[(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(a_1' e_1 + a_2' e_2 + a_3' e_3)] = 0.$$

En effectuant les calculs et en groupant convenablement les termes on obtient

$$(a_1 a_2' - a_2 a_1')[e_1 e_2] + (a_2 a_3' - a_3 a_2')[e_2 e_3] \\ + (a_3 a_1' - a_1 a_3')[e_3 e_1] = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3}.$$

Déterminons maintenant l'équation du plan passant par un point donné M′ et perpendiculaire à un vecteur donné a. Pour tout point M de ce plan on devra avoir

$$[(M - M') | a] = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$(x_1 - x_1') a_1 + (x_2 - x_2') a_2 + (x_3 - x_3') a_3 = 0.$$

VIII. ***Représentation d'une courbe.*** — Supposons que dans l'expression

$$M = O + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

les quantités x_1, x_2, x_3, soient des fonctions d'une même variable indépendante réelle t. Lorsqu'on fera varier t d'une manière continue entre certaines limites, le point M décrira une courbe.

Posons pour abréger

$$f(t) = x_1(t)\,e_1 + x_2(t)\,e_2 + x_3(t)\,e_3,$$

d'où il résulte

$$\mathrm{M} = \mathrm{O} + f(t),$$

et désignons par $x = \mathrm{OM}$ le segment partant du point fixe O, on aura, pour l'équation d'une courbe gauche quelconque

$$x = f(t).$$

C'est à l'aide de cette forme que nous examinerons les propriétés les plus importantes des courbes.

Pour une courbe plane, la fonction vectorielle $f(t)$ se réduit à

$$x = x_1(t)\,e_1 + x_2(t)\,e_2,$$

ou, si l'on introduit les coordonnées polaires

$$x = \rho(t)\,e^{i\varphi(t)}\,\mathrm{E}_1.$$

Voici, à titre d'exemple :

1° l'équation de l'ellipse

$$x = a\cos t.\,e_1 + b\sin t.\,e_2,$$

ou

$$x = \frac{a+b}{2}\,e^{it}\,\mathrm{E}_1 + \frac{a-b}{2}\,e^{-it}\,\mathrm{E}_1;$$

2° celle de la spirale d'Archimède

$$x = ate^{it}\,\mathrm{E}_1.$$

Si dans l'équation générale d'une courbe gauche

$$x = x_1(t)\,e_1 + x_2(t)\,e_2 + x_3(t)\,e_3,$$

on introduit les coordonnées polaires du plan $e_1\,e_2$, on obtient

$$x = \rho(t)\,e^{i\varphi(t)}\,\mathrm{E}_1 + z(t)\,\mathrm{E}_3.$$

Ainsi, on a, pour l'équation de l'hélice

$$x = h e^{it} E_1 + h t E_3.$$

IX. ***Représentation d'une surface.*** — Si le vecteur x est donné en fonction de deux variables réelles indépendantes u et v, le lieu du point

$$M = O + f(u, v)$$

sera généralement une surface ; on peut concevoir cette surface comme engendrée, soit par les courbes u obtenues en donnant à la variable v une série de valeurs quelconques, soit par les courbes v correspondant à une série de valeurs de u.

Ainsi, on peut, en général, représenter une surface par une équation de la forme

$$x = x_1(u, v)\, e_1 + x_2(u, v)\, e_2 + x_3(u, v)\, e_3.$$

On aurait, par exemple, pour les surfaces de révolution

$$x = u \cos v . e_1 + u \sin v . e_2 + \varphi(u)\, e_3,$$

ou

$$x = u e^{iv} E_1 + \varphi(u) E_3.$$

Dans notre étude sur les surfaces nous envisagerons toujours l'équation sous sa forme générale

$$x = f(u, v).$$

CHAPITRE PREMIER

DES COURBES GAUCHES

§ 1. — Généralités.

1. — Nous supposerons toujours que, dans l'équation générale d'une courbe

$$x = f(t),$$

la fonction $f(t)$ est développable par la formule de Taylor aux environs de toute valeur t comprise dans un certain intervalle, sauf de certaines valeurs isolées.

Nous admettrons sur la courbe comme sens positif, celui qui est déterminé par les valeurs croissantes de la variable t. Au lieu de la variable arbitraire t, il sera souvent préférable de choisir l'arc s compté dans le sens positif à partir d'un point fixe situé sur cette courbe.

2. — A deux points infiniment voisins M et M_1 pris sur la courbe

$$x = f(s)$$

correspond un vecteur infiniment petit dx.

Il est évident que cette droite infiniment petite a pour direction celle de la tangente à la courbe au point M.

Soit ds la *longueur de l'arc* MM_1 ; on a

$$ds = \operatorname{mod} dx = \sqrt{\overline{dx^2}}.$$

Dans le cas d'une variable quelconque t, on aurait

$$\frac{ds}{dt} = \operatorname{mod} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2}.$$

Le vecteur infiniment petit dx étant dirigé suivant la tangente, il est clair que la dérivée $\frac{dx}{ds}$ représente un vecteur de longueur unité ayant même direction et même sens que dx. Représentons-

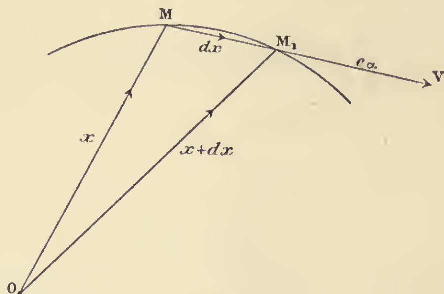


Fig. 2.

le par $e_\alpha = \text{MV}$. Il s'ensuit que la *direction de la tangente* en un point M de la courbe est donnée par le vecteur-unité

$$e_\alpha = \frac{dx}{ds} = x'.$$

La tangente en un point M de la courbe est représentée par l'équation

$$\left[(\xi - x)\ \frac{dx}{ds}\right] = 0,$$

dans laquelle ξ est un vecteur allant de l'origine à un point quelconque de la tangente.

Le *plan normal* à la courbe est donné par l'équation

$$\left[(\xi - x) \middle| \frac{dx}{ds}\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [(\xi - x) \mid x'] = 0.$$

3. — Nous allons établir l'équation du *plan osculateur* en adoptant pour ce plan la définition suivante :

Le plan osculateur en un point M est la limite vers laquelle tend un plan passant par la tangente en ce point et par un point M_1 infiniment voisin de M.

L'équation d'un plan passant par M est de la forme

$$[(\xi - x) \mid n] = 0 \tag{1}$$

dans laquelle n désigne un vecteur normal au plan.

Pour que ce plan contienne la tangente en M il faut que l'on ait

$$[dx \mid n] = 0, \tag{2}$$

relation qui exprime que le vecteur n doit être perpendiculaire à la tangente en M.

Le point M_1 infiniment voisin de M est déterminé par

$$x_1 = f(t+h) = x + \frac{h}{1}\frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3x}{dt^3} + \dots,$$

h étant l'accroissement donné à la variable indépendante t.

Le plan (1) devant contenir ce point, on a

$$h\left[\frac{dx}{dt}\middle| n\right] + \frac{h^2}{1.2}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\middle| n\right] + \frac{h^3}{1.2.3}\left[\frac{d^3x}{dt^3}\middle| n\right] + \dots = 0.$$

Le premier terme est nul en vertu de la condition (2) ; supprimant le facteur $\frac{h^2}{2}$ et faisant tendre h vers zéro, on aura finalement

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2}\middle| n\right] = 0.$$

Le vecteur n doit donc être perpendiculaire à la fois aux vecteurs $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$; on peut donc écrire

$$n = \left|\left[\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2x}{dt^2}\right]\right. \qquad \text{ou} \qquad \left| n = \left[\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2x}{dt^2}\right]\right.,$$

et l'on obtient pour l'équation du plan osculateur

$$\left[(\xi - x)\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2x}{dt^2}\right] = 0.$$

On reconnaît immédiatement que, dans le cas où la variable indépendante est l'arc s, le vecteur $x'' = \frac{d^2x}{ds^2}$ est perpendiculaire au vecteur tangentiel. En effet de l'égalité

$$e_\alpha^2 = 1$$

on tire

$$\left[e_\alpha \middle| \frac{de_\alpha}{ds}\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [e_\alpha | x''] = 0.$$

Le vecteur x'' contenu dans le plan osculateur et dirigé perpendiculairement au vecteur tangentiel détermine la direction de la normale principale. Soit e_λ le vecteur-unité qui fixe cette direction ; on aura

$$e_\lambda = \frac{x''}{\operatorname{mod} x''} \text{ ou } \frac{x''}{\sqrt{x''^2}}.$$

§ 2. — Courbure et rayon de courbure.

4. — Étudions la variation de la direction de la tangente lorsque le point de contact se déplace sur la courbe (C). A cet effet, considérons la courbe sphérique (Γ) décrite par l'extrémité du vecteur-unité γ mené par le point O parallèlement au vecteur tangentiel e_α, lorsque celui-ci se déplace d'une manière continue sur la courbe.

La courbe (Γ) porte le nom d'*indicatrice sphérique des tangentes*. A tout point M de la courbe (C) correspond un point M_α de la courbe (Γ). On a la relation

$$M_\alpha = O + e_\alpha.$$

L'angle formé par les tangentes menées aux points infiniment voisins M et M′ sera mesuré par l'arc $M_\alpha M_\alpha'$ de la courbe sphérique.

La limite du rapport de cet angle à l'arc MM′ porte le nom de *courbure* de la courbe en M. En désignant cette limite par $\frac{1}{\rho}$, on aura

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{mod} \frac{d\gamma}{ds} = \sqrt{\gamma'^2}.$$

Le *nombre* ρ ou l'inverse de la courbure porte le nom de *rayon de courbure*. De l'équation de la courbe sphérique

$$\gamma = e_\alpha(s)$$

on déduit

$$d_\gamma = de_\alpha,$$

relation qui exprime que la *tangente à l'indicatrice est parallèle à la normale principale.*

La longueur de l'arc $d\gamma$ étant donnée par l'expression

$$\text{arc } d_\gamma = \sqrt{de_\alpha^2} = \sqrt{\left[\frac{d^2x}{ds^2}\right]^2}\, ds,$$

on aura, pour la courbure

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left[\frac{de_\alpha}{ds}\right]^2} = \sqrt{x''^2}.$$

Introduisons le vecteur e_λ qui détermine la direction de la normale principale

$$e_\lambda = \frac{x''}{\sqrt{x''^2}};$$

on pourra écrire

$$e_\lambda = \rho x'', \quad \text{ou encore} \quad \frac{de_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}\, e_\lambda.$$

Le point $N = M + \rho e_\lambda$, situé sur la normale principale en M, est appelé *centre de courbure* au point M.

Remarque. — Les relations qui précèdent ont été obtenues en prenant comme variable indépendante l'arc s. Il sera facile, en suivant une marche analogue, de traiter le cas où l'équation de la courbe est exprimée en fonction d'une variable quelconque.

§ 3. — Torsion ; formules de Frenet.

5. — Considérons, en un point M d'une courbe gauche, la tangente et la normale principale, et menons en ce point la perpendiculaire au plan osculateur. Cette droite porte le nom de *binormale.* Nous admettrons que la tangente soit menée dans le sens des arcs croissants et que la normale principale soit dirigée

du point M vers le centre de courbure. Le sens de la binormale sera déterminé plus loin. Soit e_σ le vecteur-unité déterminant

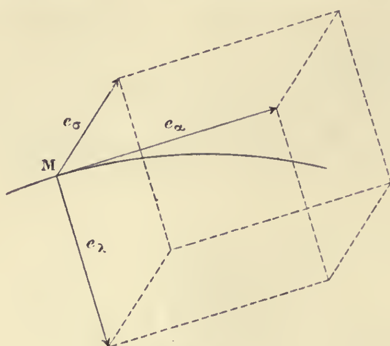


Fig. 3.

la direction de cette droite ; on aura, en conservant pour le moment le double signe,

$$
\begin{aligned}
e_\sigma &= \pm | [e_\alpha e_\lambda] \\
e_\alpha &= \pm | [e_\lambda e_\sigma] \\
e_\lambda &= \pm | [e_\sigma e_\alpha]
\end{aligned}
$$

et, de plus

$$[e_\alpha e_\lambda e_\sigma] = \pm 1.$$

Les vecteurs e_α, e_λ, e_σ étant perpendiculaires deux à deux, on a, en outre

$$[e_\alpha | e_\lambda] = 0, \qquad [e_\lambda | e_\sigma] = 0, \qquad [e_\sigma | e_\alpha] = 0.$$

Étudions la variation de la direction de la binormale lorsque le point M se déplace sur la courbe. Nous considérons, comme plus haut, le vecteur-unité η mené par le point fixe O parallèlement aux vecteurs e_σ. Pendant le déplacement de M sur la courbe, l'extrémité M_σ du vecteur η décrira une courbe appelée *indicatrice sphérique des binormales.*

On a donc

$$M_\sigma = O + e_\sigma.$$

L'arc $d\eta$ mesure l'angle formé par les plans osculateurs en deux points infiniment voisins M et M′.

La limite du rapport de cet angle à l'arc correspondant MM' porte le nom de *torsion* de la courbe en M.

Le *nombre* τ ou l'inverse de la torsion est appelé *rayon de torsion*. On a donc, par définition, en désignant la torsion par $\frac{1}{\tau}$,

$$\frac{1}{\tau} = \text{mod } \frac{d\gamma_1}{ds} = \sqrt{\overline{\gamma_1'^2}};$$

et, puisque l'on a, pour la courbe sphérique

$$\gamma_1 = e_\sigma,$$

on pourra écrire

$$\frac{1}{\tau} = \text{mod } \frac{de_\sigma}{ds} = \sqrt{\overline{e'_\sigma{}^2}}.$$

Nous allons montrer que e_σ' est parallèle à la normale principale.

En effet, de la relation

$$[e_\sigma | e_\alpha] = 0$$

on déduit

$$\left[\frac{de_\sigma}{ds} \Big| e_\alpha\right] + \left[e_\sigma \Big| \frac{de_\alpha}{ds}\right] = 0;$$

or le second terme de cette équation est nul en vertu de l'expression

$$\frac{de_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}\, e_\lambda;$$

il reste donc

$$[e'_\sigma | e_\alpha] = 0$$

relation qui signifie que e_σ' est perpendiculaire à e_α. Mais, en différentiant $e_\sigma^2 = 1$, on obtient

$$[e_\sigma | e'_\sigma] = 0$$

d'où il résulte que e_σ' est perpendiculaire à e_σ. On reconnaît donc que le vecteur e_σ' est parallèle à la normale principale.

Le module de ce vecteur étant désigné par $\frac{1}{\tau}$, on aura donc la relation

$$\frac{de_\sigma}{ds} = \frac{1}{\tau}\, e_\lambda.$$

6. — Déterminons maintenant le module de e_σ', c'est-à-dire calculons l'expression $\sqrt{e_\sigma'^2}$.

Les équations de condition

$$e_\sigma^2 = 1 \qquad [e_\sigma | x'] = 0 \qquad [e_\sigma | x''] = 0$$

donnent par dérivation

$$[e_\sigma | e'_\sigma] = 0 \qquad [e_\sigma | x''] + [e'_\sigma | x'] = 0 \qquad [e_\sigma | x'''] + [e'_\sigma | x''] = 0.$$

D'après les deux premières égalités on reconnaît de nouveau que e_σ' est perpendiculaire à la fois à e_σ et à x', et que, par suite, il est parallèle à x''. On peut donc poser

$$e'_\sigma = \mu x'',$$

μ étant un nombre qu'il reste à déterminer.

La troisième égalité devient alors

$$[e_\sigma | x'''] + [\mu x'' | x''] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\mu x''^2 = -[e_\sigma | x'''];$$

mais, d'après

$$e_\sigma = \pm | [e_\alpha e_\lambda] = \pm \rho | [x' x''] \qquad \text{et} \qquad x''^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

on a

$$\frac{\mu}{\rho^2} = \mp \rho | [x' x''] | x'''$$

et, par suite,

$$\mu = \mp \rho^3 [x' x'' x'''].$$

(¹) On démontre facilement que l'on a $[\, | \, [a_1\, a_2] \, | \, a_3] = [a_1\, a_2\, a_3]$.

Ainsi l'on a

$$e'_\sigma = \mp \rho^3 [x'x''x'''] x''.$$

La valeur de la torsion devient alors

$$\sqrt{\overline{e'_\sigma}^2} = \mp \rho^3 [x'x''x'''] \sqrt{\overline{x''}^2} = \mp \rho^2 [x'x''x'''] = \pm \frac{[x'x''x''']}{\overline{x''}^2}.$$

Nous choisissons le signe de la torsion de manière que le vecteur e'_σ soit dirigé dans le même sens que le vecteur e_λ. Il suffit donc que, dans les formules précédentes, on prenne le signe supérieur si $[x'x''x''']$ est négatif, ou le signe inférieur si ce trivecteur est positif.

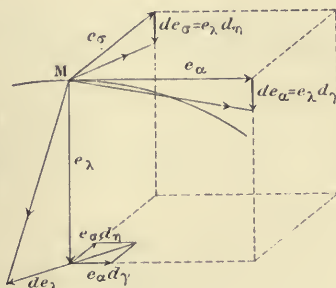


Fig. 4.

Si donc on considère le cube ayant comme arêtes la tangente, la normale principale et la binormale, on voit que les vecteurs de_α et de_σ prennent la direction de e_λ.

7. — La considération de la courbure et de la torsion nous a conduit aux deux relations

$$(F_1) \qquad \frac{de_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} e_\lambda, \qquad \frac{de_\sigma}{ds} = \frac{1}{\tau} e_\lambda. \qquad (F_2)$$

Il nous reste à déterminer la valeur de $\frac{de_\lambda}{ds}$. En dérivant

$$e_\lambda = \pm | [e_\sigma e_\alpha]$$

on a

$$\frac{de_\lambda}{ds} = \pm \left| \left[e_\sigma \frac{de_\alpha}{ds} \right] \pm \right| \left[\frac{de_\sigma}{ds} e_\alpha \right]$$

ou, d'après (F_1) et (F_2)

$$\frac{de_\lambda}{ds} = \pm \frac{1}{\rho} \,|\, [e_\sigma e_\lambda] \pm \frac{1}{\tau} \,|\, [e_\lambda e_\alpha]$$

ou, finalement

$$\frac{de_\lambda}{ds} = \mp \frac{1}{\rho} e_\alpha \mp \frac{1}{\tau} e_\sigma. \qquad (F_3)$$

On reconnaît donc que le vecteur e'_λ est parallèle au plan $e_\alpha e_\sigma$.

Les relations (F_1), (F_2), (F_3), constituent ce que l'on appelle les formules de Frenet.

§ 4. — Courbure normale ; formule de Lancret.

8. — Après avoir étudié la courbure et la torsion d'une courbe en ayant recours à l'indicatrice sphérique des tangentes et des binormales, nous examinerons la variation de la direction de la normale principale.

Nous appellerons *courbure normale* ou *troisième courbure* d'une courbe en un point donné, la limite du rapport de l'angle de deux normales principales infiniment voisines à l'arc correspondant de la courbe.

Soit φ le vecteur-unité variable issu du point O et déterminant la courbe sphérique des normales principales.

$$\varphi = e_\lambda.$$

Si l'on désigne la courbure normale par $\frac{1}{\nu}$, on aura, par définition

$$\frac{1}{\nu} = \operatorname{mod} \frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\varphi'^2};$$

mais

$$d\varphi = de_\lambda,$$

donc

$$\frac{1}{\nu} = \sqrt{\left[\frac{de_\lambda}{ds}\right]^2}.$$

Or, on a (F_3)

$$\frac{de_\lambda}{ds} = \mp \frac{1}{\rho} e_\alpha \mp \frac{1}{\tau} e_\sigma$$

et, par conséquent,

$$\left[\frac{de_\lambda}{ds} \middle| \frac{de_\lambda}{ds} \right] = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}.$$

La valeur de la courbure normale a donc pour expression

$$\frac{1}{\nu} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}}.$$

Cette relation entre les trois courbures est connue sous le nom de formule de Lancret. Elle intervient d'une manière très utile dans l'étude des surfaces réglées qui se rattachent à une courbe donnée.

CHAPITRE II

DE LA THÉORIE DES SURFACES
GÉNÉRALITÉS; RELATIONS FONDAMENTALES

§ 1. — Généralités.

9. — ***Coordonnées curvilignes sur une surface.*** — Nous avons vu dans l'*Introduction* qu'une surface pouvait être représentée par une équation de la forme

$$x = f(u, v).$$

Cette équation donne deux systèmes de courbes situées sur la surface, suivant que l'on assigne une valeur particulière à l'une ou à l'autre des variables u ou v. Tout point M de la surface est déterminé si l'on donne aux paramètres u et v des valeurs particulières u_1 et v_1 ; il se trouve à l'intersection des courbes

$$x = f(u_1, v) \qquad \text{et} \qquad x = f(u, v_1).$$

Ces paramètres u et v ont reçu le nom de *coordonnées curvilignes,* tandis que l'ensemble des courbes coordonnées $u =$ const. et $v =$ const. s'appelle un *réseau*.

Dans la suite nous supposerons toujours que, dans un intervalle donné pour les variables u et v, la fonction f est déterminée, finie et continue, et que, sauf en des points particuliers ou le long de certaines courbes, elle possède des dérivées premières, secondes et troisièmes finies et continues.

10. — ***Élément linéaire.*** — Désignons par (U) les courbes $v =$ const. le long desquelles le paramètre u est variable ; de même soient (V) les courbes $u =$ const. le long desquelles v est variable.

Donnons aux paramètres u et v des accroissements du et dv, et considérons les courbes (U) et (U_1) pour lesquelles v prend les

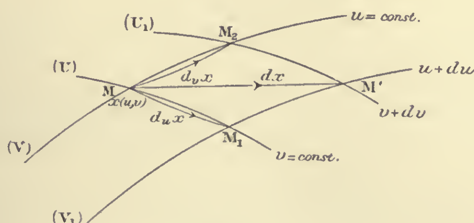


Fig. 5.

valeurs constantes v et $v + dv$; de la même manière, soient (V) et (V_1) les courbes correspondant à u et $u + du$. Le point M (u, v) vient alors en M' $(u + du,\ v + dv)$.

Lorsque la variable u seule varie, on a sur la courbe (U) un arc $MM_1 = d_u x$; on a de même sur (V), pour $u =$ const., un arc $MM_2 = d_v x$.

On a

$$\left.\begin{aligned} d_u x &= x_1 - x = \frac{\partial x}{\partial u}\, du \\ d_v x &= x_2 - x = \frac{\partial x}{\partial v}\, dv. \end{aligned}\right\}$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ représentent les vecteurs tangentiels aux courbes (U) et (V).

L'élément d'arc MM' est déterminé par la relation

$$ds = \text{mod}\, dx = \sqrt{dx^2}.$$

Mais

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv,$$

d'où l'on tire

$$ds^2 = [dx \mid dx] = \left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 du^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] du\,dv + \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 dv^2.$$

En posant, selon la notation de Gauss,

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 = \mathrm{E}, \quad \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] = \mathrm{F}, \quad \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 = \mathrm{G},$$

l'expression de l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Les quantités E, F, G, portent le nom de *quantités fondamentales du premier ordre.*

Nous conviendrons que sur chacune des courbes (U) et (V) le sens positif est celui qui correspond aux valeurs croissantes du paramètre. Si nous représentons par $d_u s$ et $d_v s$ la longueur des éléments d'arc comptés sur chacune de ces courbes, nous aurons

$$d_u s = \sqrt{E}\, du \qquad \text{et} \qquad d_v s = \sqrt{G}\, dv,$$

les racines étant prises avec le signe positif.

D'après l'expression

$$F = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v} \right]$$

on reconnaît immédiatement que les courbes (U) et (V) ne peuvent se couper à angle droit que si l'on a $F = 0$.

11. — **Vecteurs-unité e_u, e_v.** — Pour faciliter les recherches nous remplaçons les vecteurs tangentiels $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$, par les vecteurs-unité obtenus en divisant chacun d'eux par son module. Nous posons donc

$$e_u = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2}}, \qquad e_v = \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2}}.$$

En introduisant les quantités fondamentales, on aura

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad e_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Ces relations permettent de déterminer l'angle α formé par les courbes (U) et (V) en un point donné.

En effet, on a

$$\cos\alpha = [e_u \mid e_v] = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right]}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

d'où l'on déduit

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{F}.$$

12. — ***Élément superficiel.*** — Considérons le quadrilatère formé par les courbes (U), (U_1), (V) et (V_1). Nous pouvons, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, l'envisager comme un parallélogramme. En appelant $d\omega$ cet *élément superficiel*, on aura

$$d\omega = [d_u x \; d_v x] = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right] du\, dv.$$

Le produit extérieur $\left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right]$ définit une portion finie du plan tangent ; nous l'appellerons le *champ tangentiel*. Déterminons sa valeur absolue, c'est-à-dire, calculons l'expression

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right]^2.$$

A cet effet considérons le vecteur n normal à la surface et défini par l'égalité

$$n = \left|\left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right..$$

On a

$$|n = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right],$$

et, en appliquant une relation déterminée plus haut (*Intr.* V), on pourra écrire

$$[|n]^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 - \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right]^2$$

ou

$$n^2 = EG - F^2.$$

L'élément superficiel a donc pour mesure

$$\sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

On parviendrait encore à cette expression en effectuant directement le produit

$$d_u s\, d_v\, s \sin \alpha.$$

13. — A l'aide du vecteur normal n on obtient facilement l'équation de la normale à la surface ainsi que celle du plan tangent.

En désignant par ξ le vecteur joignant l'origine O à un point quelconque de la normale, il suffira, pour établir l'*équation de la normale*, d'écrire que les vecteurs $\xi - x$ et n coïncident ; donc

$$[(\xi - x)\, n] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left[(\xi - x) \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right)\right] = 0.$$

Le *plan tangent* sera représenté par l'équation

$$[(\xi - x) \,|\, n] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left[(\xi - x) \; \frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0.$$

14. — ***Angle formé par une courbe avec les courbes coordonnées.*** — Soit (C) une courbe quelconque passant par un point donné M (u, v) de la surface. Déterminons l'angle formé par cette courbe avec les courbes coordonnées (U) et (V). Nous supposons que sur cette courbe on ait fixé le sens positif de l'arc.

L'équation de la surface étant $x = f(u, v)$, une courbe quelconque tracée sur la surface sera déterminée si l'on donne les paramètres u et v en fonction d'une nouvelle variable t,

$$u = \varphi(t) \qquad v = \psi(t).$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de la surface donne l'équation de la courbe (C)

$$x = f_1(t).$$

Prenons, pour simplifier, au lieu d'une variable quelconque t, l'arc s de la courbe.

La direction des tangentes aux courbes (U), (V), (C), est déterminée par les vecteurs-unité.

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad e_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{dx}{ds}.$$

En appelant θ l'angle formé par les vecteurs e_u et $\frac{dx}{ds}$, on aura

$$\cos\theta = \left[e_u \middle| \frac{dx}{ds}\right] = \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{ds}\right)\right]$$

ou

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds}\right).$$

De la même manière la formule

$$\sin\theta = \left[e_u \; \frac{dx}{ds}\right]$$

donne

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}$$

Pour le cas des courbes coordonnées rectangulaires ($F = 0$), on a simplement

$$\cos\theta = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \qquad \sin\theta = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \cdot$$

15. — ***Conditions d'orthogonalité de deux courbes.*** — Envisageons maintenant une seconde courbe (C′) passant par le point M et déterminons la condition d'orthogonalité des courbes (C) et (C′).

Soient dx et δx les directions des tangentes menées en M respectivement aux courbes (C) et (C′). Il faut que l'on ait

$$[dx \mid \delta x] = 0,$$

ou

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v\right)\right] = 0$$

En effectuant cette multiplication on trouve pour la condition d'orthogonalité la forme connue,

$$E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v = 0.$$

16. — ***Réseau isotherme.*** — Étant donné sur une surface un système orthogonal de courbes coordonnées, on dit que ces courbes forment un *réseau isotherme* lorsqu'elles divisent la surface en carrés infiniment petits.

Soient

$$d_u s = \sqrt{E}\, du \qquad d_v s = \sqrt{G}\, dv.$$

les éléments d'arcs comptés sur les courbes coordonnées.

A des accroissements égaux de du et de dv, doivent correspondre des éléments d'arcs égaux, donc $d_u s = d_v s$. Il faut donc que l'on ait

$$E = G$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2.$$

Telle est la condition pour que le système orthogonal des courbes (U) et (V) forme un réseau isotherme.

L'élément linéaire prend alors la forme

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Nous n'examinerons pas ici la détermination d'un pareil système ; la méthode vectorielle ne modifie guère l'exposé que l'on trouve dans les traités consacrés à la géométrie des surfaces.

§ 2. — Relations fondamentales.

17. — ***Forme fondamentale du second ordre.*** — L'équation d'une surface étant donnée sous la forme $x = f(u, v)$, nous avons, de la différentielle première

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv,$$

déduit la *forme fondamentale du premier ordre*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{I}$$

De la même manière la différentielle seconde d^2x nous conduira à la forme fondamentale du second ordre.

Mais, introduisons d'abord le vecteur-unité e_ν normal à la surface au point considéré ; grâce à ce vecteur les quantités fondamentales du second ordre se prêtent à une interprétation géométrique immédiate.

Nous posons donc

$$e_\nu = \frac{n}{\operatorname{mod} n} = \frac{n}{\sqrt{n^2}},$$

étant donné, par définition

$$n = \left|\left[\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right.;$$

le module de n est, d'après le n° 12, donné par la relation

$$n^2 = EG - F^2.$$

Considérons maintenant la différentielle du second ordre,

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2,$$

u et v étant envisagés comme variables indépendantes.

En multipliant les deux membres par $|e_\nu$, on a

$$[d^2x\,|\,e_\nu] = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\middle|\,e_\nu\right]du^2 + 2\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,\middle|\,e_\nu\right]du\,dv + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\middle|\,e_\nu\right]dv^2,$$

et, en posant

$$D = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\middle|\,e_\nu\right],\qquad D' = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,\middle|\,e_\nu\right],\qquad D'' = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\middle|\,e_\nu\right],$$

on pourra écrire

$$[d^2x\,|\,e_\nu] = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2. \tag{II}$$

On reconnaît aisément que le premier membre représente la

composante normale du vecteur d^2x, et que les vecteurs D, D′, D″, correspondent aux composantes normales des vecteurs

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

L'expression (II) conserve la même forme si les variables u et v, au lieu d'être indépendantes, sont fonctions d'un même paramètre s ; en effet dans ce cas les coefficients

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| e_v\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| e_v\right]$$

des termes en d^2u et d^2v sont nuls en vertu de l'orthogonalité du vecteur e_v par rapport aux directions $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$. On peut donc écrire

$$\left[\frac{d^2x}{ds^2} \middle| e_v\right] = \frac{\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2}{ds^2}. \qquad \text{(II′)}$$

Le second membre de l'équation (II) porte le nom de *forme fondamentale du second ordre*. L'étude des formes (I) et (II) est d'une importance considérable dans la théorie des surfaces. On montre que les coefficients E, F, G, D, D′, D″, ne sont pas indépendants les uns des autres, mais qu'ils sont liés par des équations établies par Gauss et Codazzi (¹).

Nous nous bornons à rappeler ici le résultat remarquable établi par Gauss d'après lequel l'expression $\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2$ peut être exprimée exclusivement en fonctions de E, F, G et de leurs dérivées.

18. — ***Les différentes expressions de D, D′, D″.*** — Les conditions de perpendicularité

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| e_v\right] = 0 \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| e_v\right] = 0$$

dérivées successivement par rapport à u et à v donnent

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \middle| e_v\right] = -\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial e_v}{\partial u}\right]; \quad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \middle| e_v\right] = -\left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial e_v}{\partial u}\right]$$

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \middle| e_v\right] = -\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial e}{\partial v}\right], \quad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \middle| e_v\right] = -\left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial e_v}{\partial v}\right];$$

(¹) Consulter Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. III, p. 242 et suivantes.

d'où l'on déduit

$$\left[\frac{\partial x}{\partial v} \,\middle|\, \frac{\partial e_\nu}{\partial u}\right] = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \,\middle|\, \frac{\partial e_\nu}{\partial v}\right].$$

On a donc pour les *quantités fondamentales du second ordre* les expressions suivantes :

$$(\text{III}) \quad \begin{cases} D = \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} \,\middle|\, e_\nu\right] = -\left[\dfrac{\partial x}{\partial u} \,\middle|\, \dfrac{\partial e_\nu}{\partial u}\right], \\ D' = \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \,\middle|\, e_\nu\right] = -\left[\dfrac{\partial x}{\partial u} \,\middle|\, \dfrac{\partial e_\nu}{\partial v}\right] = -\left[\dfrac{\partial x}{\partial v} \,\middle|\, \dfrac{\partial e_\nu}{\partial u}\right], \\ D'' = \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} \,\middle|\, e_\nu\right] = -\left[\dfrac{\partial x}{\partial v} \,\middle|\, \dfrac{\partial e_\nu}{\partial v}\right]; \end{cases}$$

ou, si l'on introduit le vecteur normal n,

$$(\text{III}'') \quad \begin{cases} D = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} \,\middle|\, n\right] = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\right], \\ D' = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \,\middle|\, n\right] = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\right], \\ D'' = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} \,\middle|\, n\right] = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\right]. \end{cases}$$

19. — ***Dérivées premières de*** e_ν. — Déterminons les expressions de $\dfrac{\partial e_\nu}{\partial u}$ et de $\dfrac{\partial e_\nu}{\partial v}$ en fonction des dérivées premières de x, et des coefficients des deux formes fondamentales.

De l'égalité $e_\nu^2 = 1$ on déduit

$$\left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial e_\nu}{\partial u}\right] = 0 \qquad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial e_\nu}{\partial v}\right] = 0,$$

relations qui expriment que les vecteurs $\dfrac{\partial e_\nu}{\partial u}$, $\dfrac{\partial e_\nu}{\partial v}$ sont perpendiculaires au vecteur normal ; on peut donc les exprimer au moyen des vecteurs tangentiels $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, en posant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial u} = k \dfrac{\partial x}{\partial u} + l \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial e_\nu}{\partial v} = k' \dfrac{\partial x}{\partial u} + l' \dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

k, k', l, l' étant des coefficients à déterminer.

En multiplier chaque terme par $\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right.$ on a

$$\left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] = k \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] + l \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right],$$

$$\left[\frac{\partial e_v}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] = k' \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] + l' \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right],$$

ou

$$-D = kE + lF \qquad -D' = k'E + l'F.$$

En opérant avec $\left| \frac{\partial x}{\partial v} \right.$, on aurait de même

$$-D' = kF + lG \qquad -D'' = k'F + l'G.$$

On obtient ainsi les valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} k &= \frac{FD' - GD}{EG - F^2}, \qquad & k' &= \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}, \\ l &= \frac{FD - ED'}{EG - F^2}, \qquad & l' &= \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}. \end{aligned} \right.$$

CHAPITRE III

DE LA COURBURE DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE

§ 1. — Théorème de Meusnier.

20. — Nous allons étudier la courbure des courbes tracées sur une surface et passant par l'un de ses points M. Soit

$$x = f(u, v)$$

l'équation de la surface et (C) l'une de ces courbes. Celle-ci est définie si l'on donne u et v en fonction d'une variable indépendante, que nous supposerons pour plus de simplicité être l'arc s de la courbe.

On a, pour le vecteur tangentiel de la courbe en M,

$$e_\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}.$$

Désignons par θ l'angle que fait la direction e_λ de la normale principale à la courbe avec la direction e_ν de la normale à la surface ; on a

$$\cos\theta = [e_\lambda \mid e_\nu].$$

Si l'on représente par ρ le rayon de courbure de (C), on a d'après la première formule de Frenet (n° 7),

$$\frac{de_\alpha}{ds} = \frac{e_\lambda}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{e_\lambda}{\rho}.$$

Multiplions les deux membres de la dernière égalité par $|e_\nu$, ce qui donne

$$\left[\frac{d^2x}{ds^2}\,\middle|\, e_\nu\right] = \frac{[e_\lambda \mid e_\nu]}{\rho},$$

et tenons compte de la relation (voir n° 17) (II')

$$\left[\frac{d^2x}{ds^2} \middle| e_\nu \right] = \frac{\mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}' du\, dv + \mathrm{D}'' dv^2}{ds^2};$$

nous obtenons ainsi la formule fondamentale

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du dv + \mathrm{D}''\,dv^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du dv + \mathrm{G}\,dv^2}. \tag{I}$$

On constate d'abord, qu'en un point d'une surface, une courbe quelconque passant par ce point a même rayon de courbure que la section plane déterminée par le plan osculateur à la courbe.

La formule (I) conduit immédiatement au théorème de Meusnier, d'après lequel on peut ramener la recherche de la courbure des courbes passant par un point à celle des sections normales passant par ce point.

Envisageons donc la section contenant la normale à la surface et la tangente à la courbe considérée ; c'est ce que l'on appelle la *section normale*.

La courbure $\frac{1}{\mathrm{R}}$ de la courbe ainsi déterminée s'obtient en posant $\cos\theta = \pm 1$, d'où il résulte la relation

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\pm 1}{\mathrm{R}}, \quad \text{ou bien } \rho = \pm \mathrm{R} \cos\theta.$$

On voit ainsi que le rayon de courbure d'une section oblique est la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale ayant même tangente ; c'est là le *théorème de Meusnier*.

21. — ***Signe de la courbure.*** — Nous sommes ainsi conduits à introduire un signe pour la courbure. Nous conviendrons qu'en un point donné la courbure d'une section normale est positive si les vecteurs e_λ (normale principale) et e_ν (normale à la surface) sont dirigés dans le même sens [1] ; dans le cas contraire la courbure sera négative.

---

[1] La direction de e_ν, ou, ce qui revient au même, celle de $n = \left|\left[\frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right]\right.$ est déterminée d'après la convention adoptée au n° IV (*Introduction*).

La courbure $\frac{1}{\rho}$ d'une section normale $x = f(s)$ est donnée par

$$\frac{1}{\rho} = \left[\frac{d^2x}{ds^2} \middle| e_\lambda \right],$$

et, puisque par convention on a

$$e_\lambda = \pm e_\nu,$$

l'expression

$$\frac{1}{\rho} = \left[\frac{d^2x}{ds^2} \middle| e_\nu \right]$$

représente la courbure en grandeur et en signe.

§ 2. — Courbure des sections principales.

22. — ***Sections principales.*** — On se trouve ainsi ramené à l'étude de la variation du rayon de courbure d'une section normale dont le plan tourne autour de la normale au point considéré.

Déterminons les sections qui correspondent au maximum et au minimum de la courbure ; elles portent le nom de *sections principales*.

Pour une section normale on a

$$\frac{1}{\rho} = \left[\frac{de_\alpha}{ds} \middle| e_\nu \right] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} = [x'' \mid e_\nu].$$

Mais en dérivant l'équation $[x' | e_\nu] = 0$ on a

$$[x'' \mid e_\nu] + [x' \mid e'_\nu] = 0 ;$$

l'expression de la courbure devient donc

$$\frac{1}{\rho} = -[x' \mid e'_\nu]. \tag{II}$$

Posons, avec M. Grassmann (*Programme*, p. 53), que la variation de la courbure est nulle,

$$\delta[x' \mid e'_\nu] = 0 \quad \text{ou} \quad [\delta x' \mid e'_\nu] + [x' \mid \delta e'_\nu] = 0.$$

Si l'on remarque que pour toute rotation autour de e_ν on a

$$\delta e_\nu = 0 \text{ et par conséquent } \delta e'_\nu = 0,$$

on aura simplement l'équation

$$[\delta x' \mid e'_\nu] = 0. \qquad \text{(III)}$$

Pour obtenir $\delta x'$ il suffit de considérer les relations

$$x'^2 = 1 \qquad [x' \mid e_\nu] = 0\,;$$

elles donnent

$$[x' \mid \delta x'] = 0 \qquad [x' \mid \delta e_\nu] + [\delta x' \mid e_\nu] = 0$$

et, puisque $\delta e_\nu = 0$, la dernière équation se réduit à

$$[\delta x' \mid e_\nu] = 0.$$

On reconnaît donc que $\delta x'$ doit être perpendiculaire à la fois à x' et à e_ν ou, ce qui revient au même, parallèle au vecteur

$$\mid [x' e_\nu].$$

Soit l la longueur du vecteur $\delta x'$, on aura par conséquent

$$\delta x' = l \mid [x' e_\nu].$$

L'équation de condition (III) devient alors

$$[x' e_\nu\, e'_\nu] = 0. \qquad \text{(IV)}$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est immédiate. En effet, on peut écrire

$$[dx\, e_\nu\, (e_\nu + de_\nu)] = 0,$$

ce qui veut dire que, pour une section principale, la normale e_ν en un point x d'une surface et la normale $e_\nu + de_\nu$ en un point infiniment voisin $x + dx$ se trouvent dans un même plan avec l'élément dx.

Si, de plus, on remarque que les vecteurs e'_ν et x' sont tous deux perpendiculaires à e_ν, il est évident, d'après ce qui précède, qu'ils doivent être parallèles ; l'équation (IV) se réduit donc à la suivante

$$[x' e'_\nu] = 0. \qquad \text{(V)}$$

Écrivons la condition de parallélisme des deux vecteurs e'_ν et x' sous la forme

$$e'_\nu = \mu . x'$$

μ étant un facteur constant. Pour déterminer ce facteur, multiplions chaque membre par $|x'$ nous aurons

$$[e'_\nu \mid x'] = \mu [x' \mid x']$$

et en vertu de l'équation (II)

$$\mu = -\frac{1}{\rho}.$$

Ainsi tout déplacement sur une section principale est caractérisé par la relation

$$e'_\nu = -\frac{1}{\rho} x' \qquad \text{ou} \qquad de_\nu = -\frac{1}{\rho} dx. \qquad \text{(VI)}$$

23. — ***Directions principales.*** — Nous allons montrer qu'en chaque point d'une surface il existe deux sections correspondant aux maximum et minimum des rayons de courbure. Les tangentes aux sections principales déterminent ce que l'on appelle les *directions principales* au point considéré ; tandis que les rayons de courbure correspondants portent le nom de *rayons de courbure principaux*.

Déterminons d'abord les directions principales.

L'équation (VI) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial u} du + \frac{\partial e_\nu}{\partial v} dv = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right).$$

En multipliant chaque terme par $\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right.$ on obtient

$$\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]du + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial v}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]dv = -\frac{1}{\rho}\left(\left[\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]du + \left[\frac{\partial x}{\partial v}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]dv\right)$$

ou

$$\mathrm{D}du + \mathrm{D}'dv = \frac{1}{\rho}(\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv). \qquad \text{(VII')}$$

On aurait de la même manière, en effectuant l'opération $\left| \frac{\partial x}{\partial v} \right.$

$$D'du + D''dv = \frac{1}{\rho}(F du + G dv). \qquad \text{(VII'')}$$

En éliminant ρ entre ces deux équations, on a

$$(FD'' - GD')\,dv^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (ED' - FD)\,du^2 = 0. \qquad \text{(VIII)}$$

Cette équation étant du second degré en $\frac{du}{dv}$ il existe donc, en général, deux directions principales en un point donné d'une surface. Il n'y a d'exception qu'en certains points isolés, appelés *ombilics*, pour lesquels tous les coefficients de cette équation sont nuls, c'est-à-dire pour lesquels on a

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

Pour ces points, généralement en nombre limité, les directions principales sont indéterminées.

24. — ***Rayons de courbure principaux.*** — L'élimination de $\frac{du}{dv}$ entre les deux équations (VII') et (VII'') conduit à l'équation

$$(DD'' - D'^2)\,\rho^2 - (GD - 2FD' + ED'') + (EG - F^2) = 0 \qquad \text{(IX)}$$

qui donne les deux rayons de courbure principaux au point considéré. Si ce point est un ombilic, l'équation (IX) a ses racines égales, ainsi qu'on peut le montrer au moyen d'un calcul très simple. Si l'on tient compte de l'équation (I) on reconnaît aisément qu'en un pareil point le rayon de courbure conserve la même valeur, quelle que soit la section normale.

Nous allons établir pour l'équation aux rayons de courbure principaux encore une autre expression en partant de l'équation (VI) mise sous la forme

$$\frac{\partial e_v}{\partial u}\,du + \frac{\partial e_v}{\partial v}\,dv = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)$$

dont nous avons déjà fait usage plus haut.

On peut écrire

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial e_v}{\partial u} \right) du + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial e_v}{\partial v} \right) dv = 0,$$

d'où il résulte que les deux vecteurs représentés dans ces parenthèses sont parallèles. On a donc

$$\left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial e_v}{\partial u} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial e_v}{\partial v} \right) \right] = 0$$

ou, en effectuant l'opération indiquée,

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \frac{1}{\rho^2} + \left\{ \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e_v}{\partial v} \right] + \left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right\} \frac{1}{\rho} + \left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \frac{\partial e_v}{\partial v} \right] = 0.$$

En multipliant chaque terme par $n = \left| \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right.$ on a l'équation cherchée

$$n^2 \frac{1}{\rho^2} + \left\{ \left[n \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e_v}{\partial v} \right] + \left[n \frac{\partial e_v}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right\} \frac{1}{\rho} + \left[n \frac{\partial e_v}{\partial u} \frac{\partial e_v}{\partial v} \right] = 0. \quad \text{(X)}$$

Désignons par ρ_1 et ρ_2 les deux rayons de courbure principaux, et par s_1 et s_2 les arcs des sections principales. L'équation (VI)

$$e'_v = -\frac{1}{\rho} x',$$

se décompose alors dans les deux suivantes

$$\frac{\partial e_v}{\partial s_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial x}{\partial s_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial e_v}{\partial s_2} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial x}{\partial s_2}. \quad \text{(XI)}$$

Retranchons ces deux équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $\left| \frac{\partial x}{\partial s_2} \right.$ et $\left| \frac{\partial x}{\partial s_1} \right.$, il vient alors

$$\left[\frac{\partial e_v}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial x}{\partial s_2} \right] - \left[\frac{\partial e_v}{\partial s_2} \middle| \frac{\partial x}{\partial s_1} \right] = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial x}{\partial s_2} \right].$$

D'après une condition exprimée plus haut (n° 18) le premier

membre doit être nul ; on a donc, en tout point qui n'est pas un ombilic,

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial x}{\partial s_2} \right] = 0, \qquad \text{(XII)}$$

ce qui signifie que *les deux directions principales sont perpendiculaires entre elles.*

§ 3. — Formule d'Euler.

25. — Exprimons maintenant la courbure d'une section normale quelconque au moyen des rayons de courbure principaux ρ_1 et ρ_2.

On a (n° 22, II) en désignant par s l'arc d'une section normale

$$\frac{1}{\rho} = -\left[\frac{dx}{ds} \middle| \frac{de_\nu}{ds} \right].$$

Introduisons les arcs s_1 et s_2 des sections principales, nous aurons

$$\frac{1}{\rho} = -\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial x}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds} \right) \middle| \left(\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} \frac{ds_2}{ds} \right) \right].$$

En effectuant les calculs et en réduisant [1], on obtient

$$\frac{1}{\rho} = -\left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} \right] \left(\frac{ds_1}{ds} \right)^2 - \left[\frac{\partial x}{\partial s_2} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} \right] \left(\frac{ds_2}{ds} \right)^2,$$

ou

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{ds_1}{ds} \right)^2 + \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{ds_2}{ds} \right)^2.$$

Appelons φ l'angle formé par s et s_1 c'est-à-dire posons

$$\frac{ds_1}{ds} = \cos \varphi \qquad \frac{ds_2}{ds} = \sin \varphi.$$

---

[1] Le coefficient du terme en $\frac{ds_1}{ds} \frac{ds_2}{ds}$ est nul en vertu des relations (XI) et (XII).

L'expression de la courbure prend alors la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{\rho_2} \sin^2 \varphi,$$

connue sous le nom de *formule d'Euler*.

On parvient encore à cette formule en suivant une autre voie. Prenons comme point de départ l'expression (I) (n° 20) ; pour la courbure d'une section normale elle devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2}{ds^2}.$$

Si, dans les valeurs (n° 18, III)

$$\mathrm{D} = -\left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} \right],$$

$$\mathrm{D}' = -\left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} \right] = -\left[\frac{\partial x}{\partial s_2} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} \right], \quad \mathrm{D}'' = -\left[\frac{\partial x}{\partial s_2} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} \right],$$

on introduit les expressions

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial x}{\partial s_1}, \qquad \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial x}{\partial s_2},$$

on trouve

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\rho_1} \mathrm{E} \qquad \mathrm{D}' = 0, \qquad \mathrm{D}'' = \frac{1}{\rho_2} \mathrm{G}.$$

L'expression de la courbure devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{E}}{\rho_1} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{\mathrm{G}}{\rho_2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2;$$

et, puisqu'on a (n° 14),

$$\cos \varphi = \sqrt{\mathrm{E}} \frac{du}{ds}, \qquad \sin \varphi = \sqrt{\mathrm{G}} \frac{dv}{ds},$$

on obtiendra finalement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{\rho_2} \sin^2 \varphi.$$

On déduit de cette formule que les rayons de courbure ρ et ρ' de deux sections normales rectangulaires satisfont à la relation

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \text{const.},$$

ce qui revient à dire que la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires est constante en un point.

Remarque. — Quant à la discussion des résultats obtenus dans ce chapitre, on la trouve dans tous les traités consacrés à l'Analyse et à ses applications géométriques. La méthode vectorielle n'y apporte guère de modification.

CHAPITRE IV

DE LA COURBURE DES SURFACES

26. — Définitions. — Dans ce chapitre nous appliquerons la méthode de Grassmann à l'étude de la courbure d'une surface en un point donné.

La notion de courbure d'une surface peut être envisagée à différents points de vue. Nous l'examinerons d'abord sous les deux formes généralement employées, à savoir : 1° la courbure totale ; 2° la courbure moyenne. Nous consacrerons ensuite un paragraphe à la notion importante de courbure moyenne quadratique, d'après Casorati.

Nous avons vu, d'après la formule d'Euler, qu'en un point d'une surface la courbure d'une section normale s'exprime à l'aide des rayons de courbure principaux ρ_1 et ρ_2. Suivant la définition que l'on adopte pour la courbure d'une surface on se trouve conduit à telle ou telle fonction de ρ_1 et ρ_2.

On appelle *courbure totale* en un point d'une surface la quantité

$$C_t = \frac{1}{\rho_1 \rho_2},$$

tandis que la *courbure moyenne* d'une surface en un point est définie par l'expression

$$C_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

L'équation aux rayons de courbure principaux (n° 24, X) fournit immédiatement les valeurs

$$C_t = \frac{\left[n \; \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \; \frac{\partial e_\nu}{\partial v}\right]}{n_-^2}, \tag{I}$$

$$C_m = -\frac{\frac{1}{2}\left\{\left[n \; \frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial e_\nu}{\partial v}\right] + \left[n \; \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right\}}{n_-^2}. \tag{II}$$

La *courbure moyenne quadratique* est caractérisée par l'expression

$$C_q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right). \qquad \text{(III)}$$

§ 1. — Courbure totale.

27. — La notion de courbure totale est due à Gauss. Elle doit être envisagée comme une généralisation de la définition de la courbure des lignes planes.

Si, dans le plan d'une courbe plane, on considère un cercle de rayon 1, et si, par le centre de ce cercle, on mène des parallèles aux normales à la courbe, l'angle de deux normales sera mesuré par l'arc de cercle limité par les rayons qui leur sont respectivement parallèles ; on entendra par courbure de la courbe en un point donné, la quantité C définie par

$$C = \lim \frac{s_0}{s},$$

s_0 étant l'arc de cercle correspondant à l'arc infiniment petit s pris sur la courbe.

Considérons maintenant sur une surface une étendue σ limitée par une courbe fermée et comprenant le point donné M. Si par le centre d'une sphère de rayon 1 on mène des parallèles aux normales de la surface le long de ce contour, on déterminera sur la sphère une courbe également fermée et limitant une aire σ_0. Nous appellerons *courbure totale* de la surface au point M la quantité C_t définie par

$$C_t = \lim \frac{\sigma_0}{\sigma}.$$

Nous allons montrer que cette limite est précisément égale au produit des courbures principales.

En effet soit $d\Sigma$ le rectangle élémentaire $MM_1M'M_2$ dont les côtés $MM_1 = d_{s_1}x$ et $MM_2 = d_{s_2}x$ sont dirigés suivant les directions principales en M. On a pour cet élément superficiel

$$d\Sigma = [d_{s_1}x d_{s_2}x] \qquad \text{ou} \qquad d\Sigma = \left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \; \frac{\partial x}{\partial s_2}\right] ds_1 ds_2.$$

Si l'on désigne par $d\sigma$ la valeur de l'aire $d\Sigma$, on aura (*Introduction*, V)

$$d\sigma = \sqrt{n^2}\, ds_1 ds_2,$$

n étant défini par

$$n = \left\| \left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{\partial x}{\partial s_2} \right] \right\|.$$

A l'élément superficiel $d\Sigma$ correspond sur la sphère de rayon 1, un rectangle élémentaire $d\Sigma_0$ déterminé par les rayons menés parallèlement aux normales e_ν en $MM_1M'M_2$ et représenté par l'expression

$$d\Sigma_0 = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} \right] ds_1 ds_2.$$

Mais, puisque les arcs sont comptés suivant les directions principales, on a (n° 24, XI),

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial x}{\partial s_1}, \qquad \frac{\partial e_\nu}{\partial s_2} = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial x}{\partial s_2}.$$

On en déduit

$$d\Sigma_0 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \left[\frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{\partial x}{\partial s_2} \right] ds_1 ds_2,$$

et, si l'on désigne par $d\sigma_0$ la valeur de l'aire $d\Sigma_0$, on obtiendra

$$d\sigma_0 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{n^2}\, ds_1 ds_2.$$

D'où il résulte, en adoptant pour la courbure totale la définition donnée par Gauss,

$$C_t = \frac{d\sigma_0}{d\sigma} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}.$$

28. — Déterminons maintenant l'expression de la courbure totale en fonction de x et de ses dérivées,

$$x = f(u, v)$$

étant l'équation de la surface.

Nous appliquerons encore la définition de Gauss, mais nous laisserons de côté la considération particulière des directions principales.

Soit donc

$$d\Sigma = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] du dv$$

l'élément superficiel en un point M de la surface. Si l'on représente par e_ν le vecteur normal unité en M, on aura, au point correspondant sur la sphère de rayon 1, l'élément superficiel

$$d\Sigma_0 = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial u} \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right] du dv.$$

La valeur $d\sigma$ de l'élément $d\Sigma$ a pour expression

$$d\sigma = \sqrt{n^2}\, du dv.$$

Pour obtenir la valeur $d\sigma_0$ de l'élément $d\Sigma_0$ nous appliquerons le second procédé indiqué dans l'*Introduction* (n° V) et d'après lequel il suffit de multiplier le bivecteur considéré par le vecteur normal unité. On a donc

$$d\sigma_0 = \left[e_\nu \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right] du dv.$$

La courbure totale est donc représentée par le rapport

$$C_t = \frac{d\sigma_0}{d\sigma} = \frac{\left[e_\nu \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right]}{\sqrt{n^2}},$$

et, si l'on remplace le premier vecteur par sa valeur

$$e_\nu = \frac{n}{\sqrt{n^2}},$$

on aura

$$C_t = \frac{\left[n \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right]}{n^2}.$$

Nous retrouvons ainsi l'expression (n° 26, I) que nous avons

obtenue au moyen de l'équation aux rayons de courbure principaux.

29. — Ramenons l'expression précédente à la forme donnée par Gauss :

$$C_t = \frac{DD'' - D'^2}{n^2}.$$

A cet effet, remplaçons n par sa valeur

$$n = \left| \left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right|;$$

on obtient

$$C_t = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \; \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right]}{n^2}. \qquad \text{(IV)}$$

En appliquant une propriété des déterminants (*Introduction*, VI), on pourra écrire

$$C_t = \frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \right] & \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial u} \right] \\ \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right] & \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right] \end{vmatrix},$$

d'où l'on déduit, en tenant compte des relations fondamentales (n° 18, III)

$$C_t = \frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} -D & -D' \\ -D' & -D'' \end{vmatrix} = \frac{DD'' - D'^2}{n^2}. \qquad \text{(V)}$$

Cette expression peut, comme on sait, être exprimée uniquement en fonction de E, F, G et de leurs dérivées.

30. — Appliquons ce qui précède à la détermination de la *courbure totale d'une surface réglée.*

Une pareille surface peut être représentée par l'équation

$$x = y(u) + v . e_\alpha(u), \qquad \text{(VI)}$$

dans laquelle $y\ (u)$ détermine la directrice (C), et $e_\alpha\ (u)$ le vecteur-unité qui fixe la direction de la génératrice (g) passant par un point P pris sur (c).

Ainsi les deux systèmes de courbes coordonnées sont, pour $u =$ const., les génératrices rectilignes, pour $v =$ const., des

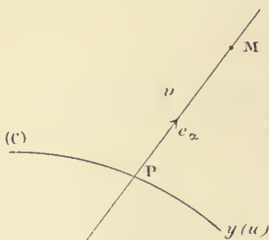


Fig. 6.

courbes telles que chacun de leurs points soit distant du point correspondant pris sur la directrice d'une longueur constante v.

Nous déterminerons C_t au moyen de la formule (V).

L'équation de la surface donne

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{dy}{du} + v \frac{de_\alpha}{du}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = e_\alpha(u),$$

d'où

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

On remarque immédiatement que

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{n^2}} \left[n \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right] = 0.$$

Il suffit donc de calculer l'expression

$$D' = \frac{1}{\sqrt{n^2}} \left[n \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \right].$$

Or on a d'une part, pour le vecteur normal

$$n = \left| \left[\frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial x}{\partial v} \right] = \right| \left[\left(\frac{dy}{du} + v \frac{de_\alpha}{du} \right) e_\alpha(u) \right) \right]$$

ou

$$n = \left| \left[\frac{dy}{du} e_\alpha(u) \right] + v \right| \left[\frac{de_\alpha}{du} \ e_\alpha(u) \right], \qquad \text{(VII)}$$

et d'autre part

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{de_\alpha}{du}.$$

L'expression D′ devient

$$D' = \frac{1}{\sqrt{n^2}} \left[\frac{de_\alpha}{du} \; \frac{dy}{du} \; e_\alpha(u) \right],$$

et l'on aura pour la courbure totale d'une surface réglée

$$C_t = - \frac{\left[e_\alpha(u) \; \frac{de_\alpha}{du} \; \frac{dy}{du} \right]^2}{(n^2)^2}. \qquad \text{(VIII)}$$

Une surface réglée est dite *développable* si en chacun de ses points la *courbure totale est nulle*, c'est-à-dire si son équation satisfait à la condition

$$\left[e_\alpha(u) \; \frac{de_\alpha}{du} \; \frac{dy}{du} \right] = 0. \qquad \text{(IX)}$$

L'interprétation géométrique de cette relation est immédiate. Écrite sous la forme

$$[e_\alpha(e_\alpha + de_\alpha)\, dy] = 0,$$

elle montre que les génératrices menées en deux points infiniment voisins y et $y + dy$ sont dans un même plan.

Il est aisé de reconnaître [1], en discutant par exemple l'équation (VII), que, dans le cas particulier où la courbure totale est nulle, la direction e_α des génératrices reste tangente à une courbe tracée sur la surface et appelée *arête de rebroussement* de la surface développable.

§ 2. — Courbure moyenne.

31. — La courbure d'une surface peut encore être envisagée à un autre point de vue. La somme des courbures de deux

[1] Voir Grassmann fils, *Programme*, 1893, p. 80.

sections normales rectangulaires étant constante en un même point, on peut prendre cette constante comme mesure de la courbure de la surface.

Si l'on représente la courbure moyenne par C_m, on a par définition

$$C_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Nous avons donné plus haut (n° 26, II), l'expression de la courbure moyenne en la tirant de l'équation aux rayons de courbure principaux.

Nous allons montrer comment cette expression peut être ramenée à la forme ordinaire contenant les quantités fondamentales E, F, G et D, D′, D″.

Soit donc

$$C_m = -\frac{\frac{1}{2}\left\{\left[n \ \frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial e_v}{\partial v}\right] + \left[n \ \frac{\partial e_v}{\partial u} \ \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right\}}{n^2}$$

l'expression à transformer.

Considérons d'abord le premier terme du numérateur. On a, en remplaçant n par $\left|\left[\frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right|$,

$$\left[n \ \frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial e_v}{\partial v}\right] = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial x}{\partial v} \ \middle| \ \frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial e_v}{\partial v}\right];$$

en appliquant une propriété des déterminants déjà employée plus haut, le second membre peut être mis sous la forme

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] & \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] \\ \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial e_v}{\partial v}\right] & \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial e_v}{\partial v}\right] \end{vmatrix},$$

ou, en tenant compte des relations fondamentales,

$$\begin{vmatrix} E & F \\ -D' & -D'' \end{vmatrix},$$

ou enfin,

$$\left[n \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e_v}{\partial v} \right] = -(ED'' - FD').$$

On aurait de même pour le second terme

$$\left[n \frac{\partial e_v}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] = -(GD - FD').$$

L'expression [1] de la courbure moyenne devient alors

$$C_m = \frac{1}{2} \frac{(GD - 2\,FD' + ED'')}{n^2}.$$

Cas particulier. — La courbure moyenne est nulle lorsque les deux courbures principales sont égales et opposées. Les surfaces dont la courbure moyenne est nulle en chaque point portent le nom de *surfaces minima*. Sur une pareille surface l'étendue limitée par un contour fermé donné est un minimum par rapport aux surfaces infiniment voisines passant par ce contour.

On voit donc que si $x = f(u, v)$ représente une surface minima, la fonction x devra annuler le numérateur de l'expression obtenue pour la courbure moyenne, c'est-à-dire vérifier l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{e\,\partial_v}{\partial v} \right] + \left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0.$$

Réciproquement il est aisé de montrer que toute surface d'étendue minimum et limitée par un contour donné possède la propriété qu'en chacun de ses points la courbure moyenne est nulle.

En effet, considérons une portion de surface (σ) limitée par un contour fermé (C). La surface étant donnée par l'équation $x = f(u, v)$, on aura, pour un élément superficiel pris sur (σ),

$$d\Sigma = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] du dv.$$

---

(1) Cette expression peut d'ailleurs être déduite directement de l'équation IX, n° 24.

Pour obtenir la valeur de l'aire, il suffit de joindre aux vecteurs $\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}$, le vecteur normal unité e_ν (*Introd.* n° V.) ; on a donc

$$d\sigma = \left[e_\nu\ \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v} \right] du\, dv.$$

L'aire σ sera donnée par l'intégrale double

$$\sigma = \int\int \left[e_\nu\ \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v} \right] du\, dv,$$

étendue à toutes les valeurs de u, v, correspondant aux points de (σ).

Pour que la portion d'aire limitée par la courbe (C) soit un minimum, il faut que la variation première $\delta\sigma$ soit nulle.

En appliquant les principes du calcul des variations, l'expression

$$\delta\sigma = \delta \int\int \left[e_\nu\ \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v} \right] du\, dv,$$

conduit à la condition [1]

$$\left[e_\nu\ \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial e_\nu}{\partial v} \right] + \left[e_\nu\ \frac{\partial e_\nu}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0.$$

On retrouve donc la relation qui exprime que la courbure moyenne est nulle en chaque point de la surface.

§ 3. — Courbure moyenne quadratique.

32. — Dans le cas où l'une des courbures (C_t ou C_m) est nulle, il y a une sorte de contradiction entre l'idée commune que l'on se fait de la courbure d'une surface et la définition mathématique adoptée.

On a donc été conduit à introduire pour la courbure d'autres fonctions des rayons de courbure principaux qui ne s'annulent que pour le cas du plan.

---

[1] Pour le détail de la transformation, nous renvoyons au *Programme* (1893) de M. Grassmann fils, et à la Note publiée à ce sujet par M. Carvallo dans le *Bulletin des sciences mathématiques* (1894).

Nous examinerons ici la fonction remarquable étudiée par M. Casorati [1] et qui porte le nom de *courbure moyenne quadratique*, selon la dénomination proposée par M. d'Ocagne [2].

M. Casorati adopte encore comme mesure de la courbure en un point M, la limite du rapport

$$\frac{\text{aire de l'image}}{\text{aire de la calotte}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\sigma_0}{\sigma}.$$

L'aire σ de la calotte est celle d'un cercle de rayon infiniment petit ε tracé autour du point M de la surface. Ici l'image n'est plus l'image sphérique d'après Gauss. Elle s'obtient de la manière suivante : sur chaque rayon du cercle ε, on porte la longueur de l'arc du cercle de rayon 1 mesurant l'angle que la normale à la surface menée à l'extrémité de ce rayon fait avec la normale en M. Soit σ_0 l'aire comprise dans le contour infiniment petit ainsi obtenu.

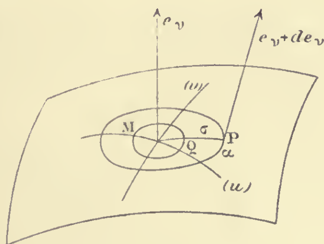


Fig. 7.

Soit P un point quelconque du cercle de rayon ε. Désignons par e_ν et $e_\nu + de_\nu$ les vecteurs normaux à la surface en M et en P. Leur angle, compté sur un cercle de rayon 1, aura pour mesure mod de_ν.

On porte donc à partir de M, sur le rayon MP, une longueur

$$MQ = \sqrt{de_\nu^2}.$$

Mais on a

$$de_\nu = \frac{\partial e_\nu}{\partial u}\,du + \frac{\partial e_\nu}{\partial v}\,dv. \qquad (I)$$

---

(1) *Acta mathematica*, t. XIV.

(2) Voir son *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*, p. 338, Paris 1896.

Nous supposerons pour simplifier que dans l'équation de la surface $x = f(u, v)$ les variables indépendantes u et v soient telles que les accroissements du et dv soient pris suivant les directions principales en M ; autrement dit, nous admettrons que u et v correspondent aux lignes de courbure.

On aura donc (n° 24, XII)

$$\frac{\partial e_v}{\partial u} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial e_v}{\partial v} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

et l'expression (I) devient

$$de_v = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial u}du - \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial x}{\partial v}dv.$$

On en déduit, en tenant compte de l'orthogonalité des courbes (u) et (v),

$$de_v^2 = \frac{1}{\rho_1^2}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 du^2 + \frac{1}{\rho_2^2}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 dv^2.$$

Posons

$$\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2}\, du = \varepsilon\cos\alpha, \qquad \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2}\, dv = \varepsilon\sin\alpha,$$

α désignant l'angle que forme le rayon ε avec (u).

Il s'ensuit que

$$\overline{MQ}^2 = de_v^2 = \varepsilon^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\rho_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{\rho_2^2}\right).$$

Évaluons maintenant les aires σ et σ_0. Nous aurons, en employant les coordonnées polaires,

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\overline{MP}^2\, d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varepsilon^2\, d\alpha = \pi\varepsilon^2.$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\overline{MQ}^2\, d\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\rho_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{\rho_2^2}\right)d\alpha$$

ou

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\varepsilon^2\pi\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right).$$

D'où il résulte pour le rapport cherché la valeur remarquable

$$C_q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right).$$

On se trouve donc bien en présence d'une fonction qui ne s'annule que si les rayons ρ_1 et ρ_2 sont tous deux infinis, c'est-à-dire seulement pour le cas où la surface considérée est un plan.

La courbure moyenne quadratique est liée à la courbure totale et à la courbure moyenne par la relation simple.

$$C_m^2 = \frac{C_q + C_t}{2}.$$

CHAPITRE V

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE

§ 1. — Systèmes conjugués.

33. — Deux familles de courbes tracées sur une surface forment un *réseau conjugué* lorsque les quadrilatères infiniment petits limités par les courbes du système sont plans. Cela revient à dire que, si en deux points infiniment voisins M, M_1 pris sur une courbe de l'une des familles on mène les tangentes aux courbes de l'autre famille tracées par ces points, ces deux tangentes sont dans un même plan avec l'élément M M_1.

Considérons donc le quadrilatère infiniment petit limité par les courbes u, $u + du$, v, $v + dv$, et prenons les points M et M_1 par exemple sur la courbe $u =$ const. On a pour le point M_1

$$x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv.$$

Les tangentes en M et M_1 aux courbes v et $v + dv$ sont déterminées par les vecteurs

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Ces deux vecteurs doivent être dans un même plan avec l'élément M M_1, c'est-à-dire avec le vecteur $\dfrac{\partial x}{\partial v}$; on a donc la condition

$$\left[\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x_1}{\partial u}\right] = 0;$$

si l'on remplace $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ par sa valeur, on obtient, après une réduction très simple

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial x}{\partial v} \ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] = 0, \tag{I}$$

ou, en vertu de la notation adoptée (v. n° 18)

$$D' = 0.$$

C'est *l'équation caractéristique d'un réseau conjugué*. Écrite à l'aide du vecteur normal unité, elle prend la forme

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] = 0. \tag{II}$$

Si l'on rapproche cette équation des conditions de perpendicularité

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] = 0 \qquad \text{et} \qquad \left[e_\nu \middle| \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0,$$

on voit que les vecteurs

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}$$

sont coplanaires. On peut donc écrire

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = A(u, v) \frac{\partial x}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial x}{\partial v}. \tag{III}$$

Ainsi, les courbes coordonnées (u) et (v) forment sur la surface $x = f(u, v)$ un système conjugué, si la fonction x satisfait à cette équation aux dérivées partielles du second ordre.

34. — Les courbes conjuguées jouissent de la propriété suivante :

Les génératrices de la développable engendrée par les plans tangents menés le long de l'une des courbes sont tangentes aux courbes conjuguées.

En effet, nous savons (n° 30) que pour qu'une droite, dirigée suivant le vecteur $e_\alpha(v)$ et s'appuyant sur une courbe $y(v)$, engen-

dre une développable, il faut que le second membre de l'équation de la surface

$$x = y(v) + u\, e_\alpha(v)$$

vérifie la condition (n° 30, IX)

$$\left[e_\alpha(v) \frac{de_{\alpha'}}{dv} \frac{dy}{dv} \right] = 0.$$

Ici la fonction $y(v)$ correspond à $x = f(u, v)$, u étant supposé constant; tandis que $e_\alpha(v)$ est la tangente à la courbe $x = f(u, v)$ pour v const. On a donc, d'une part

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\partial x}{\partial v}$$

et, d'autre part

$$e_\alpha(v) = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial x}{\partial u}\right]^2}};$$

et l'équation de condition devient, après réduction,

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \; \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] = 0,$$

équation qui caractérise les systèmes conjugués.

35. — Reprenons l'équation (II)

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] = 0.$$

En dérivant les équations

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] = 0 \qquad \left[e_\nu \middle| \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0$$

respectivement par rapport à v et à u, on obtient

$$\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right] + \left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v} \right] + \left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] = 0,$$

ou, simplement

$$\left[\frac{\partial e_v}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] = 0 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Si l'on adopte pour les différentielles suivant les deux directions conjuguées les lettres d et δ, on pourra écrire l'équation unique

$$[de_v \mid \delta x] = 0 \qquad \text{(V)}$$

dont l'interprétation géométrique est immédiate. En effet, on sait qu'à l'élément linéaire dx correspond dans la représentation sphérique l'élément de^v ; on peut donc énoncer la proposition suivante :

La représentation sphérique de l'élément linéaire dx est perpendiculaire à l'élément conjugué δx.

En outre, la condition de perpendicularité

$$[e_v \mid \delta x] = 0$$

jointe à l'équation (II), donne

$$[(e_v + de_v) \mid \delta x] = 0,$$

relation qui signifie que δx est aussi perpendiculaire à la normale $e_v + de_v$ élevée au point $x + dx$.

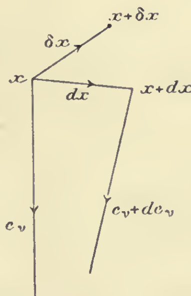


Fig. 8.

On reconnaît donc que la perpendiculaire commune aux normales e_v et $e_v + de_v$, menées aux extrémités d'un élément dx, est parallèle à l'élément conjugué δx.

Cette propriété peut être écrite sous la forme

$$\delta x = \lambda | [e_v (e_v + de_v)] \qquad \text{ou} \qquad \delta x = \lambda | [e_v de_v],$$

λ étant un facteur numérique ; et, si l'on suppose que les variables u, v correspondent aux courbes conjuguées, on aura les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \lambda_1 \left| \left[e_v \ \frac{\partial e_v}{\partial u} \right] \right. \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \lambda_2 \left| \left[e_v \ \frac{\partial e_v}{\partial v} \right] \right. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI)}$$

dans lesquelles λ_1 et λ_2 sont des fonctions de u et de v.

36. — Considérons maintenant un système quelconque de courbes coordonnées (u) et (v). L'équation

$$[de_v | \delta x] = 0,$$

qui exprime la condition pour que les deux directions dx et δx soient conjuguées, devient

$$\left[\left(\frac{\partial e_v}{\partial u} du + \frac{\partial e_v}{\partial v} dv \right) \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \right) \right] = 0,$$

ou, en introduisant la notation de Gauss,

$$\mathrm{D} du \delta u + \mathrm{D}' (du \delta v + dv \delta u) + \mathrm{D}'' dv \delta v = 0. \qquad \text{(VII)}$$

Cette relation joue, par rapport à la forme fondamentale du second ordre

$$\mathrm{D} du^2 + 2\mathrm{D}' du dv + \mathrm{D}'' dv^2,$$

le même rôle que la condition d'orthogonalité

$$\mathrm{E} du \delta u + \mathrm{F} (du \delta v + dv \delta u) + \mathrm{G} dv \delta v = 0$$

par rapport à la forme fondamentale du premier ordre

$$\mathrm{E} du^2 + 2\mathrm{F} du dv + \mathrm{G} dv^2.$$

§ 2. — Lignes de courbure.

37. — Examinons le cas particulier où *le système conjugué est*

orthogonal. Les deux familles de courbes portent alors le nom de *lignes de courbure*.

Ce sont par conséquent des courbes telles que les quadrilatères infiniment petits limités par les courbes du système sont des rectangles plans.

Pour obtenir l'équation différentielle d'un pareil système il suffit de joindre à l'équation

$$[de_\nu | \delta x] = 0$$

la condition d'orthogonalité

$$[dx | \delta x] = 0.$$

Or les vecteurs dx, δx, de_ν étant perpendiculaires au vecteur normal e_ν en vertu des équations

$$[e_\nu | dx] = 0, \qquad [e_\nu | \delta x] = 0, \qquad [e_\nu | de_\nu] = 0;$$

on en déduit immédiatement

$$[de_\nu dx] = 0, \tag{I}$$

relation qui exprime que *l'élément linéaire dx est parallèle à sa représentation sphérique de_ν*.

D'autre part, en multipliant par e_ν on a

$$[e_\nu de_\nu dx] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [e_\nu (e_\nu + de_\nu)\, dx] = 0.$$

Cette dernière équation met en évidence la propriété fondamentale des lignes de courbure. Elle montre que les deux normales infiniment voisines e et $e_\nu + de$ sont dans un même plan avec l'élément dx. Ainsi que nous l'avons montré (n° 22), cette propriété appartient aux directions principales. On est donc conduit à la proposition suivante dont on se sert souvent pour définir les lignes de courbure, à savoir :

Les normales à la surface le long d'une ligne de courbure forment une surface développable.

38. — Les deux vecteurs dx et de_ν étant parallèles, on peut écrire

$$de_\nu = \sigma dx,$$

ou encore (voir n° 22)

$$de_\nu = -\frac{1}{\rho}\,dx. \qquad \text{(II)}$$

Cette relation correspond aux formules généralement connues sous le nom de formules d'*Olinde Rodrigues*.

Si l'on désigne par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure principaux et si l'on adopte pour courbes coordonnées les lignes de courbure, on aura

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial u} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial e_\nu}{\partial v} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial x}{\partial v}. \qquad \text{(III)}$$

En déterminant les directions principales en un point donné (Voir n° 23) nous avons montré, comment de l'équation (II) on pouvait déduire la relation

$$(\mathrm{DF} - \mathrm{D'E})\,du^2 + (\mathrm{DG} - \mathrm{D''E})\,du\,dv + (\mathrm{D'G} - \mathrm{D''F})\,dv^2 = 0.$$

Lorsqu'on y considère u et v comme variables, cette expression représente l'équation différentielle des lignes de courbure.

39. — Les formules de la théorie des surfaces prennent une forme très simple si l'on choisit pour courbes coordonnées les lignes de courbure. En effet, un pareil système étant à la fois orthogonal et conjugué, on a

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{F} = 0,$$

et

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right] = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{D'} = 0.$$

L'expression du rayon de courbure d'une section normale devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{D}du^2 + \mathrm{D''}dv^2}{\mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2},$$

d'où l'on déduit, pour les rayons de courbure principaux.

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mathrm{D''}}{\mathrm{G}}.$$

On en tire, pour chacune des courbures étudiées dans le Chapitre IV :

$$C_t = \frac{DD''}{EG} \qquad \text{(courbure totale)},$$

$$C_m = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right) \text{ ou } \frac{DG + D''E}{2\,EG} \quad \text{(courbure moyenne)},$$

$$C_q = \frac{1}{2}\left(\frac{D^2}{E^2} + \frac{D''^2}{G^2}\right) \text{ ou } \frac{D^2\,G^2 + D''^2\,E^2}{2\,E^2\,G^2}$$

(courbure moyenne quadratique).

Enfin la condition d'orthogonalité de deux éléments dx et δx prend la forme

$$E\,du\,\delta u + G\,dv\,\delta v = 0,$$

tandis que les directions dx et δx sont conjuguées si l'on a

$$D\,du\,\delta u + D''\,dv\,\delta v = 0.$$

40. — Déterminons maintenant la condition à laquelle doit satisfaire la fonction $x = f(u, v)$ pour que les paramètres u, v correspondent aux lignes de courbure.

Le système (u) (v) étant conjugué, la fonction x doit vérifier l'équation linéaire (nº 33) :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients A et B. A cet effet, multiplions les deux membres par $\left|\frac{\partial e_v}{\partial u}\right.$, on aura

$$\left[\frac{\partial e_v}{\partial u}\,\middle|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right] = A\left[\frac{\partial e_v}{\partial u}\,\middle|\,\frac{\partial x}{\partial u}\right] + B\left[\frac{\partial e_v}{\partial u}\,\middle|\,\frac{\partial x}{\partial v}\right].$$

Mais, en vertu de la relation

$$\frac{\partial e_v}{\partial u} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial u}$$

et en tenant compte de la condition d'orthogonalité, on aura

$$-\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\,\middle|\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right] = -A\,\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\,\middle|\,\frac{\partial x}{\partial u}\right].$$

Posons

$$E = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right]$$

et dérivons par rapport à v, d'où

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \right] + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u} \right].$$

Le coefficient A prend donc la valeur

$$A = \frac{1}{2\,E} \frac{\partial E}{\partial v}.$$

Un calcul analogue donne

$$B = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u}.$$

La condition cherchée prend donc la forme [1]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}. \qquad \text{(IV)}$$

41. — A la propriété fondamentale des lignes de courbure d'être le seul système conjugué orthogonal qui existe sur une surface, nous rattacherons le théorème de Dupin relatif au *système triple orthogonal*. Trois familles de surfaces forment un système triple orthogonal si deux quelconques d'entre elles, prises dans des familles différentes, se coupent à angle droit. Cela revient à dire que les tangentes aux intersections mutuelles des trois surfaces forment un trièdre trirectangle.

Théorème de Dupin. — *Les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent suivant leurs lignes de courbure.*

Un système triple de surfaces peut être représenté par l'équation unique.

$$x = f(u, v, w),$$

---

[1] Dans la méthode ordinaire cette condition est exprimée par trois équations de la même forme auxquelles doivent satisfaire les coordonnées x, y, z.

dans laquelle on envisage successivemant chacun des trois paramètres comme constant.

Considérons le système formé par les trois surfaces $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$.

L'intersection de deux de ces surfaces, par exemple de $u = u_0$ et de $v = v_0$, donne une courbe le long de laquelle w varie seul.

Le vecteur tangentiel à cette courbe est donc

$$\frac{\partial x}{\partial w}.$$

De la même manière les tangentes aux courbes u et v sont déterminées par les vecteurs

$$\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Ces vecteurs étant perpendiculaires deux à deux, on a les trois conditions d'orthogonalité :

$$\left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial w}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial w} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] = 0,$$

relations qui doivent avoir lieu quelles que soient les valeurs u_0, v_0, w_0 attribuées aux paramètres u, v, w. Considérons par exemple la première ; elle doit rester satisfaite si l'on passe de la surface (v, w) à la surface infiniment voisine. On a donc, en dérivant cette relation par rapport à u,

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial w}\right] + \left[\frac{\partial x}{\partial v} \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w}\right] = 0.$$

D'une manière analogue les deux autres relations donnent

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] + \left[\frac{\partial x}{\partial w} \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] + \left[\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w}\right] = 0.$$

On en déduit

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial w}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] = 0.$$

Mais, par hypothèse les vecteurs tangentiels $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, sont respectivement perpendiculaires aux bivecteurs

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}\right], \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial w}\right], \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial w}\ \frac{\partial x}{\partial u}\right];$$

d'où il résulte que l'on doit avoir

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}\right]=0, \left[\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w}\frac{\partial x}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial w}\right]=0, \left[\frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\ \frac{\partial x}{\partial u}\right]=0. \quad \text{(V)}$$

Ces trois équations montrent que sur chaque surface d'une famille les courbes déterminées par les intersections avec les surfaces des deux autres familles forment un réseau conjugué ; or, par hypothèse ce réseau est orthogonal. Il est donc formé par les lignes de courbure.

42. — Nous allons déterminer la condition qui exprime que la fonction $x = f(u, v, w)$ représente un système triple orthogonal.

Les équations (V) peuvent être mises sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = A_1 \dfrac{\partial x}{\partial u} + B_1 \dfrac{\partial x}{\partial v}, & (\text{VI}_1) \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = A_2 \dfrac{\partial x}{\partial v} + B_2 \dfrac{\partial x}{\partial w}, & (\text{VI}_2) \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = A_3 \dfrac{\partial x}{\partial w} + B_3 \dfrac{\partial x}{\partial u}. & (\text{VI}_2) \end{cases}$$

Il suffit, pour déterminer les coefficients A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 de faire intervenir les conditions d'orthogonalité.

Considérons à cet effet un déplacement quelconque dx par rapport au trièdre trirectangle formé par les tangentes aux trois courbes au point considéré. On a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv + \frac{\partial x}{\partial w}\, dw,$$

et, si l'on pose

$$ds = \text{mod}\ dx = \sqrt{dx^2},$$

l'élément linéaire, dans le système orthogonal, aura pour expression

$$ds^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \right]^2 du^2 + \left[\frac{\partial x}{\partial v} \right]^2 dv^2 + \left[\frac{\partial x}{\partial w} \right]^2 dw^2,$$

ou

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2,$$

où l'on a

$$U^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial u} \right]^2, \qquad V^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial v} \right]^2, \qquad W^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial w} \right]^2. \quad \text{(VII)}$$

Multiplions maintenant les deux membres de l'équation (VI_1) par $\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right.$, nous aurons

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial u} \right] = A_1 \left[\frac{\partial x}{\partial u} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial u} \right] + B_1 \left[\frac{\partial x}{\partial v} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial u} \right],$$

ou

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial u} \right] = A_1 U^2.$$

Mais, en dérivant par rapport à v la première des relations (VII) il vient

$$U \frac{\partial U}{\partial v} = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial u} \right].$$

On obtient donc pour A_1 la valeur

$$A_1 = \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial v};$$

on aurait de la même manière

$$B_1 = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial u}.$$

En procédant de même pour A_2, B_2, A_3, B_3 et en remplaçant

dans les équation (VI), on aura finalement le système d'équations aux dérivées partielles du second ordre

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} &= \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Ce système a été donné pour la première fois par Lamé. Il a été soumis à une étude très approfondie par M. G. Darboux dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* et dans ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux*.

§ 3. — Lignes asymptotiques.

43. — Nous examinons maintenant une autre famille de courbes qui, ainsi que les lignes de courbure, se rattache par les liens les plus étroits au système conjugué. Ce sont les lignes asymptotiques ; elles correspondent au cas où chacune des deux familles de courbes est conjuguée à elle-même. Ainsi nous appellerons ligne asymptotique d'une surface une courbe telle qu'en chacun de ses points la tangente coïncide avec celle qui lui est conjuguée.

La condition que nous avons obtenue pour les directions conjuguées (nº 35, form. V) devient ici

$$[de_\nu \mid dx] = 0. \qquad (I)$$

Cette relation renferme toutes les propriétés des lignes asymptotiques ; elle exprime que *l'élément linéaire dx est perpendiculaire à son image sphérique de_ν*.

On peut aisément la ramener à la forme ordinairement employée. En effet, on peut écrire

$$\left[\left(\frac{\partial e_\nu}{\partial u}\,du + \frac{\partial e_\nu}{\partial v}\,dv\right) \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)\right] = 0,$$

ou, en effectuant l'opération indiquée et en adoptant la notation de Gauss

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0. \qquad (II)$$

Telle est, sous la forme connue, l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Elle est du deuxième degré en $\frac{du}{dv}$; ses solutions sont réelles si l'on a

$$DD'' - D'^2 \leqq 0.$$

On voit donc qu'en tout point d'une région où la courbure totale est négative passent, en général, deux lignes asymptotiques.

Il est aisé de reconnaître que la section normale faite dans une surface par un plan contenant la tangente à une asymptotique en un point, présente en ce point une courbure nulle. En effet, nous avons trouvé pour la courbure d'une section normale (n° 22, II).

$$\frac{1}{\rho} = -[e'_\nu \mid x']$$

Ainsi, le long d'une ligne asymptotique le rayon de courbure ρ est infini.

44. — On obtiendrait encore l'équation différentielle (II) en envisageant l'équation (VII) du n° 36, qui, pour le cas particulier qui nous occupe doit être vérifiée par $\delta u = du$, $\delta v = dv$.

Mais nous allons l'établir sous une autre forme qui nous conduira à une propriété caractéristique des lignes asymptotiques.

En différentiant l'égalité

$$[e_\nu \mid dx] = 0$$

on obtient

$$[de_\nu \mid dx] + [e_\nu \mid d^2x] = 0$$

ou, en vertu de l'équation (I),

$$[e_\nu \mid d^2x] = 0.$$

Cette relation exprime *qu'en chaque point d'une ligne asymp-*

totique le plan osculateur est tangent à la surface (voir n° 3 et n° 17, form. II).

Voici maintenant une autre conséquence de la relation fondamentale

$$[de_\nu \mid dx] = 0.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$[e_\nu \mid dx] = 0$$

on pourra écrire

$$[(e_\nu + de_\nu) \mid dx] = 0,$$

d'où l'on déduit que l'élément d'arc d'une asymptotique est la perpendiculaire commune des normales à la surface menée en chacune des extrémités.

On reconnaît donc que pour la surface réglée engendrée par les normales à la surface le long d'une asymptotique, la ligne de striction coïncide avec cette asymptotique.

45. — Déterminons l'angle que forme une ligne asymptotique avec l'une des lignes de courbure. Nous avons trouvé pour la courbure d'une section normale en fonction des courbures principales (n° 25)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\varphi,$$

φ étant l'angle que forme la direction choisie avec la direction principale correspondant au rayon ρ_1. On en déduit, pour $\frac{1}{\rho} = 0$

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \qquad \text{(IV)}$$

Cette relation donne l'angle cherché; elle montre qu'en tout point pris dans la région où la surface est à courbures opposées, les directions principales sont les bissectrices des angles formés par les directions asymptotiques. De plus elle permet de reconnaître que le réseau formé par les lignes asymptotiques ne peut être orthogonal que si l'on a en chaque point de la surface

$\rho_2 = -\rho_1$, c'est-à-dire seulement dans le cas où la surface proposée est une surface minima (voir Ch. IV, § 2).

46. — Cas particuliers. — *a*) Nous allons établir la condition à laquelle doit satisfaire l'équation de la surface

$$x = f(u, v)$$

pour que les paramètres u, v correspondent aux lignes asymptotiques.

L'équation fondamentale

$$[de_\nu \mid dx] = 0,$$

donne pour chacune des directions asymptotiques

$$\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] = 0,$$

ou

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right] = 0, \qquad \left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] = 0. \qquad \text{(V)}$$

c'est-à-dire $D = 0$ et $D'' = 0$.

Mais comme on a

$$e_\nu = \frac{1}{\sqrt{n^2}} \left| \left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right.,$$

les deux équations (V) pourront être mises sous la forme

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \; \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right] = 0 \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial u} \; \frac{\partial x}{\partial v} \; \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right] = 0.$$

Les vecteurs

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

étant coplanaires, on aura donc

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A_1 \frac{\partial x}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= A_2 \frac{\partial x}{\partial u} + B_2 \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \right. \qquad \text{(VI)}$$

Tel est le système d'équations différentielles qui doit être vérifié par la fonction x pour que les courbes coordonnées soient formées par les lignes asymptotiques de la surface.

Dans ce cas particulier l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface prend une forme remarquablement simple. Elle se réduit à :

$$\mathrm{E}\, du^2 - \mathrm{G}\, dv^2 = 0.$$

Il en est de même des expressions des courbures totale, moyenne et moyenne quadratique ; on obtient

$$\mathrm{C}_t = -\frac{\mathrm{D}'^2}{n_-^2}, \qquad \mathrm{C}_m = -\frac{\mathrm{FD}'}{n_-^2}, \qquad \mathrm{C}_q = \frac{\mathrm{D}'^2(\mathrm{F}^2 + \mathrm{EG})}{(n_-^2)^2}.$$

b) Déterminons maintenant l'équation différentielle des lignes asymptotiques pour le cas particulier où l'équation de la surface est rapportée au réseau formé par les lignes de courbure.

L'équation vectorielle

$$[de_v \mid dx] = 0$$

donne

$$\left[\left(\frac{\partial e_v}{\partial u}\, du + \frac{\partial e_v}{\partial v}\, dv\right) \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv\right)\right] = 0$$

ou

$$\left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] du^2 + \left\{\left[\frac{\partial e_v}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right] + \left[\frac{\partial e_v}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right\} du\, dv + \left[\frac{\partial e_v}{\partial v} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right] dv^2 = 0.$$

Le second terme de cette équation disparaît (en vertu des formules (IV), (n° 35), puisque le système (u, v) est conjugué. De plus on a (n° 38, III)

$$\frac{\partial e_v}{\partial u} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial e_v}{\partial v} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques se réduit donc à la forme simple

$$\frac{1}{\rho_1}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 du^2 + \frac{1}{\rho_2}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 dv^2 = 0.$$

Dans le cas d'une surface minima on aura simplement

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 du^2 - \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 dv^2 = 0$$

ou

$$\mathrm{E}\,du^2 - \mathrm{G}\,dv^2 = 0.$$

Si sur une pareille surface le réseau (u, v) est isométrique, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2,$$

on aura pour les lignes asymptotiques l'équation

$$du = \pm dv.$$

On voit donc que le réseau formé par les lignes asymptotiques d'une surface minima est déterminé par les diagonales du réseau isométrique des lignes de courbure.

§ 4. — Lignes géodésiques.

47. — Nous adopterons comme définition des lignes géodésiques d'une surface leur propriété caractéristique d'après laquelle, en chacun de leur point, le plan osculateur à la courbe est normal à la surface. Cela revient à dire que les lignes géodésiques sont des lignes tracées sur une surface de telle façon que la normale principale à la courbe, en chaque point, soit normale à la surface.

Soit e^{ν} le vecteur-unité normal à la surface

$$x = f(u, v).$$

Toute courbe tracée sur la surface est déterminée si l'on donne les paramètres u et v en fonction d'une variable que nous sup-

poserons d'abord, pour plus de simplicité, être l'arc s de la courbe. La direction de la normale principale à la courbe est déterminée par le vecteur

$$\frac{d^2x}{ds^2} \qquad \text{ou} \qquad x''.$$

Il suffira, pour obtenir l'équation différentielle des lignes géodésiques, d'écrire que cette direction coïncide avec e_ν ; on a donc

$$\left[e_\nu \ \frac{d^2x}{ds^2}\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad [e_\nu \, x''] = 0. \tag{I}$$

Considérons maintenant le cas plus général où la courbe est donnée en fonction d'une variable quelconque t. Nous parviendrons à une nouvelle forme de l'équation des lignes géodésiques en écrivant qu'en tout point de la courbe la normale e_ν à la surface est contenue dans le plan osculateur à la courbe.

Or, on a trouvé pour l'équation de ce plan (n° 3)

$$\left[(x - \xi) \ \frac{dx}{dt} \ \frac{d^2x}{dt^2}\right] = 0 ;$$

l'équation différentielle est donc

$$\left[e_\nu \ \frac{dx}{dt} \ \frac{d^2x}{dt^2}\right] = 0. \tag{II}$$

48. — On se trouve conduit aux lignes géodésiques lorsqu'on cherche la courbe de longueur minimum tracée entre deux points donnés sur une surface. Pour le montrer il suffit de considérer la longueur

$$\int_{M_0}^{M_1} ds$$

de l'arc compris entre deux points fixes M_0 et M_1 pris sur la surface, et d'écrire que la variation première de cette intégrale est nulle.

La condition

$$\delta \int_{M_0}^{M_1} ds = 0$$

jointe à la relation

$$ds^2 = [dx|dx],$$

donne, après des transformations simples ([1]), l'équation

$$\left[\frac{d^2x}{ds^2}\middle|\delta x\right] = 0, \tag{III}$$

qui exprime, qu'en tout point x de la courbe, le déplacement quelconque δx sur la surface est perpendiculaire à la normale principale à la courbe, c'est-à-dire que la direction de la normale principale coïncide avec celle de la normale à la surface.

49. — L'équation des lignes géodésiques, envisagée sous cette nouvelle forme, est l'expression vectorielle du système d'équations ordinairement employé.

En effet on a

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

et, pour un déplacement quelconque,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v.$$

L'équation (III) devant être vérifiée quels que soient les accroissements δu et δv, on aura les deux conditions

$$\left[\frac{d^2x}{ds^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right] = 0, \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{d^2x}{ds^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial v}\right] = 0. \tag{IV}$$

La première donne

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]\frac{d^2u}{ds^2} + \left[\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial v}\right]\frac{d^2v}{ds^2} + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$
$$+ 2\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right]\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0.$$

([1]) Consulter à ce sujet H. GRASSMANN, *Programme*, 1893, p. 73.

Un calcul facile conduit à la forme connue

$$E \frac{d^2u}{ds^2} + F \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{\partial E}{\partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \qquad (V')$$

En procédant d'une manière analogue pour la seconde, on obtient

$$F \frac{d^2u}{ds^2} + G \frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}\right) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \qquad (V'')$$

Les équations (V') et (V'') résolues par rapport aux dérivées secondes de u et de v donnent un système de la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} &= A_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 B_1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + C_1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ \frac{d^2v}{ds^2} &= A_2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 B_2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + C_2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \end{aligned} \right\} \qquad (VI)$$

dans lequel A_1, A_2, B_1,... sont des fonctions données de u et de v.

Telles sont les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées u et v d'un point de la géodésique exprimées en fonction de l'arc s de la courbe, la variable indépendante s étant définie par la relation

$$ds^2 = [dx \mid dx]$$

ou, en adoptant la notation ordinairement employée,

$$E \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

50. — Application. — On connaît le rôle important que jouent les lignes géodésiques en mécanique. Nous examinerons ici deux applications d'ailleurs bien connues.

a). Considérons un mobile lancé sur une surface fixe

$x = f(u, v)$, le mobile n'étant sollicité par aucune force. L'équation différentielle de son mouvement sera

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{N} e_v,$$

où m désigne la masse du mobile et N la grandeur de la réaction normale de la surface.

En multipliant les deux membres par le bivecteur normal à la surface

$$\left[e_v \frac{dx}{dt} \right],$$

on a

$$\left[e_v \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right] = 0.$$

On reconnaît donc que la trajectoire du mobile est une ligne géodésique de la surface.

La valeur de la réaction normale de la surface est donnée par l'expression

$$\mathrm{N} = m \left[e_v \middle| \frac{d^2x}{dt^2} \right].$$

b). Le second exemple est celui d'un fil tendu sur une surface entre deux de ses points A et B. Nous allons montrer que, si l'on suppose le fil assez fin pour que son poids soit négligeable, la figure d'équilibre est une ligne géodésique.

Considérons un élément d'arc $\mathrm{MM}_1 = dx$. Par hypothèse, la seule force extérieure agissant sur cet élément est la réaction N de la surface. Désignons par T la grandeur de la tension du fil en M et par $e_\alpha = \frac{dx}{ds}$ le vecteur-unité tangent à la courbe en ce point.

L'élément MM_1 est donc soumis aux tensions

$$-\mathrm{T}e_\alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}e_\alpha + d\,(\mathrm{T}e_\alpha)$$

agissant respectivement en M et en M_1.

Or, il faut que la résultante de ces deux forces fasse équilibre à la réaction normale ; d'où la condition

$$d\,(\mathrm{T}e_\alpha) = \mathrm{N}.e_v, \qquad \text{(VII)}$$

ou, en effectuant la différentiation,

$$dT . e_\alpha + T\, de_\alpha = N . e_\nu .$$

On en déduit, en multipliant par $| e_\alpha$,

$$dT\, [e_\alpha \mid e_\alpha] + T\, [de_\alpha \mid e_\alpha] = 0.$$

Mais la relation

$$[e_\alpha]^2 = 1$$

donne

$$[e_\alpha \mid de_\alpha] = 0.$$

On a donc

$$dT = 0,$$

d'où il résulte que la tension du fil est constante; soit

$$T = T_0.$$

L'équation (VII) devient

$$T_0\, de_\alpha = N . e_\nu ,$$

relation qui montre que la direction de_α de la normale principale à la courbe se confond avec celle de la normale à la surface. Cette dernière équation peut d'ailleurs être immédiatement ramenée à l'équation différentielle des lignes géodésiques (n° 47, I),

$$\left[e_\nu \;\middle|\; \frac{d^2x}{ds^2} \right] = 0.$$

En effet, il suffit de remplacer de_α par sa valeur

$$\frac{d^2x}{ds^2}\, ds$$

et de multiplier ensuite les deux membres par le vecteur e_ν.

51. — Nous terminerons ce chapitre en examinant encore la notion importante de *courbure géodésique*. Elle constitue, pour les courbes tracées sur une surface, une généralisation de la courbure d'une courbe plane.

Soit C une courbe tracée sur une surface; en un point M de cette courbe menons le plan tangent à la surface et projetons C orthogonalement sur ce plan; soit Γ la courbe obtenue.

On appelle *courbure géodésique* de la courbe C en M la courbure de la courbe Γ en ce même point. L'inverse de la courbure géodésique porte le nom de *rayon de courbure géodésique;* nous le désignerons par

$$\rho_g = MO_g.$$

Soit d'autre part $\rho = MO$ le rayon de courbure de C en M

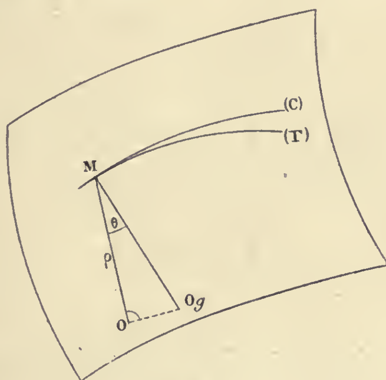


Fig. 9.

et θ l'angle formé par la normale principale de C avec le plan tangent en M.

En envisageant le cylindre qui projette orthogonalement C sur le plan tangent, on a, en vertu du théorème de Meusnier (n° 20), appliqué aux courbes C et Γ

$$\rho = \rho_g \cos\theta.$$

On a donc, pour l'expression de la courbure géodésique,

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

Appliquons cette formule aux courbes U (v = const.) et V (u = const.) d'un système orthogonal passant par un point M de la surface

$$x = f(u, v).$$

L'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

tandis que les éléments d'arc comptés respectivement sur les courbes coordonnées sont donnés par

$$d_u s = \sqrt{E}\, du, \qquad d_v s = \sqrt{G}\, dv;$$

on a, d'autre part, pour les vecteurs respectivement tangents aux courbes U et V (n°s 10 et 11),

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad e_v = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Considérons d'abord la courbe U; désignons par ρ son rayon de courbure et par e_λ le vecteur unité qui détermine la direction de la normale principale. D'après l'une des formules de Frenet (n° 7, F_1) on a

$$\frac{1}{\rho} e_\lambda = \frac{\partial e_u}{\partial_u s}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} e_\lambda = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right).$$

Et si l'on remarque que l'on a

$$\cos\theta = [e_v \mid e_\lambda],$$

on pourra écrire pour la courbure géodésique de U

$$\frac{1}{\rho_{g,u}} = \frac{[e_v \mid e_\lambda]}{\rho}.$$

En remplaçant les vecteurs e_v et e_λ par leur valeur, on aura

$$\frac{1}{\rho_{g,u}} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial x}{\partial v} \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right].$$

Si l'on effectue les calculs en tenant compte de la condition d'orthogonalité

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial v} \right] = 0,$$

le second membre devient

$$\frac{1}{E\sqrt{G}}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right].$$

Mais on a, d'une part, en dérivant la condition d'orthogonalité par rapport à u

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial v}\right]=-\left[\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right];$$

d'autre part, de la valeur

$$E=\left[\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial u}\right],$$

on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}=\left[\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right].$$

On parvient donc pour l'expression de la courbure géodésique de U à la valeur

$$\frac{1}{\rho_{g,u}}=-\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

On aurait de même pour la courbe V

$$\frac{1}{\rho_{g,v}}=-\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Remarque. — On reconnait aisément que la courbure géodésique d'une ligne géodésique est nulle, tandis que la courbure géodésique d'une ligne asymptotique est égale à sa propre courbure.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

